CHAPITRE 1. STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES

STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES

Les objectifs de ce premier chapitre sont de :

- *définir un système linéaire ;*
- *décrire son comportement en régime harmonique (fonction de transfert et diagramme de Bode) ;*
- *caractériser la linéarité d'un système, utiliser la décomposition en série de Fourier.*

I. Qu'est ce que la réponse harmonique d'un système linéaire permanent ?

De nombreux systèmes physiques (filtres en électronique, masse soumise à l'action d'un ressort de rappel et d'un amortisseur en mécanique, machine à courant continu en électrotechnique…), dans un domaine de fonctionnement limité, peuvent être modélisés par des systèmes linéaires, dont l'étude est relativement simple.

Nous limitons notre étude à des systèmes à une seule entrée et une seule sortie.

1. Réponse harmonique

Le rôle d'un système est d'élaborer un signal $s(t)$, signal de sortie ou *réponse*, à partir d'un signal donné $e(t)$, signal d'entrée ou *excitation*.

La **réponse harmonique** est la réponse $s(t)$ du système à un signal sinusoïdal : $e(t) = E_m(\cos \omega t + \varphi)$.

2. Système linéaire

Un système est linéaire si les grandeurs $e(t)$ et $s(t)$ sont liées par une **équation différentielle linéaire** (D) :

$$D_0 s + D_1 \frac{ds}{dt} + \cdots + D_n \frac{d^n s}{dt^n} = N_0 e + N_1 \frac{de}{dt} + \cdots + N_m \frac{d^m e}{dt^m}$$

D_j et D_k sont des **constantes réelles**

n, ordre maximal des dérivées successives de $s(t)$, est l'**ordre du système linéaire**.

Conséquence : Théorème de superposition *(vérifié par tout système linéaire)*

$$\left.\begin{array}{l} Si\ l'excitation\ e_1(t)\ a\ pour\ réponse\ s_1(t) \\ si\ l'excitation\ e_2(t)\ a\ pour\ réponse\ s_2(t) \end{array}\right\}\ alors\ \lambda_1 e_1(t) +\ \lambda_2 e_2(t)\ a\ pour\ réponse\ \lambda_1 s_1(t) +\ \lambda_2 s_2(t)$$

Intérêt :

- Connaître la réponse harmonique d'un système linéaire permet de connaître sa réponse à n'importe quel signal périodique (par décomposition en série de Fourier).

3. Critère de linéarité

Un système est linéaire si sa réponse harmonique est harmonique.

dit autrement : Les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires.

L'étude de la réponse harmonique permet donc de vérifier la validité du modèle linéaire.

4. Système permanent ou stationnaire

Un **système permanent** est un système dont toutes les caractéristiques sont indépendantes du temps.

Conséquence : Théorème d'invariance *(vérifié par tout système permanent)*

$$Si\ la\ réponse\ au\ signal\ d'entrée\ e(t)\ est\ s(t),$$
$$alors\ la\ réponse\ au\ signal\ d'entrée\ e(t+\tau)\ est\ s(t+\tau).$$

Intérêt :

- Un système permanent n'est pas modifié par un changement de l'origine du temps : $t' = t + \tau$.
- Une excitation donnée engendrera toujours la même réponse, quelque soit l'instant auquel on la déclenche.

II. Comment caractériser la réponse harmonique ?

1. Régime harmonique établi

Une fonction sinusoïdale du temps, définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ *n'a pas de caractère physique.*

Si l'étude est faite "suffisamment" longtemps après le début de l'excitation et si le régime transitoire s'amortit, le régime sinusoïdal est **établi** : c'est le **"régime sinusoïdal forcé"**.

En régime harmonique établi, on ne conserve que la solution particulière de l'équation différentielle : c'est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, **pulsation du signal harmonique d'entrée.**

Si elle existe, cette solution est unique. *(résultats admis)*

À l'excitation $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$, correspond la réponse $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$.

Passage en notation complexe :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \xrightarrow{complexes} \underline{e}(t) = \underline{E_m} e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{E_m} = E_m\, e^{j\varphi_e} \quad \rightarrow \begin{cases} E_m = |\underline{E_m}| \\ \varphi_e = \arg \underline{E_m} \end{cases}$$

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s) \xrightarrow{complexes} \underline{s}(t) = \underline{S_m} e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{S_m} = S_m\, e^{j\varphi_s} \quad \rightarrow \begin{cases} S_m = |\underline{S_m}| \\ \varphi_s = \arg \underline{S_m} \end{cases}$$

La dérivation par rapport à t équivaut à une multiplication par $j\omega$.

L'équation (D) s'écrit alors :

$$\sum_{i=0}^{n} D_i (j\omega)^i \underline{s} = \sum_{k=0}^{m} N_k (j\omega)^k \underline{e}$$

2. Fonction de transfert

La **fonction de transfert** du système linéaire, aussi appelée **transmittance complexe** est :

$$\underline{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{\mathrm{s}}}{\underline{\mathrm{e}}} = \frac{\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{N_k}(\mathrm{j}\omega)^{\mathrm{k}}}{\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{D_i}(\mathrm{j}\omega)^{\mathrm{i}}}$$

Le choix des lettres N et D pour les coefficients de l'équation différentielle apparaît clairement sur cette dernière expression.

3. Notation opérationnelle ou de Laplace

Cette notation repose sur la transformation de Laplace que nous ne développerons pas ici. Dans le cas du régime harmonique, on note $p = j\omega$.

La fonction de transfert se note alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} N_k (p)^k}{\sum_{i=0}^{n} D_i (p)^i}$$

Intérêt :

Dans la notation de Laplace p est considéré comme un opérateur :

- S'il s'agit de l'opérateur « multiplication par la constante $j\omega$ », on retrouve la fonction de transfert complexe.
- S'il s'agit de l'opérateur « dérivée par rapport au temps », on retrouve l'équation différentielle.

4. Représentation de la fonction de transfert : diagramme de Bode

Le gain est défini par :	$H(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right|$
Le déphasage de $\underline{s}$ par rapport à $\underline{e}$ est défini par :	$\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$
Le gain en décibel (dB) est défini par :	$G_{dB} = 20 \log H$
Le diagramme de Bode donne les deux courbes	G_{dB} et φ en fonction de $\log \omega$.

Soit H_{max} la valeur maximale de H ; $G_{dBmax} = 20 \log H_{max}$ est la valeur maximale de G_{dB}.

La pulsation de coupure ω_C à $-3dB$ est définie par :

$$H(\omega_C) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad G(\omega_C) = G_{dBmax} - 3dB$$

On définit de même la fréquence de coupure $-3dB$: $f_C = \frac{\omega_c}{2\pi}$

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de pulsation $\Delta\omega$ donnant une amplification (ou un gain) supérieur à la valeur de coupure :

$$H(\omega) > H(\omega_C) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad G(\omega) > G(\omega_C) = G_{dBmax} - 3dB$$

Annexe : Principales fonctions de transfert

Principales Fonctions de Transfert

I. Importance des systèmes d'ordre 1 et 2

Une fonction de transfert opérationnelle est une fraction rationnelle à coefficients réels ; on peut donc la décomposer en une somme de fractions rationnelles dont les dénominateurs ont un degré inférieur ou égal à 2.

Ainsi tout système linéaire peut être considéré comme la composition de systèmes linéaires d'ordres au plus égal à 2.

II. Fonctions de transfert fondamentales

Nous notons H_0 la fonction de transfert en régime permanent, τ une constante de temps (que l'on pourrait aussi noter $\frac{1}{\omega_0}$) et m un coefficient sans dimension (que l'on pourrait aussi noter $\frac{1}{2Q}$).

Systèmes linéaires d'ordre 1

Passe-bas : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{1}{1+\tau p}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{1}{1+j\omega\tau}$

Passe-haut : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{\tau p}{1+\tau p}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$

Déphaseur : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{1-\tau p}{1+\tau p}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{1-j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$

Systèmes linéaires d'ordre 2

Passe-bas : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{1}{1+2m\tau p+\tau^2 p^2}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{1}{1+2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}$

Passe-haut : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{\tau^2 p^2}{1+2m\tau p+\tau^2 p^2}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{(j\omega)^2\tau^2}{1+2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}$.

Passe-bande : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{2m\tau p}{1+2m\tau p+\tau^2 p^2}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{2mj\omega\tau}{1+2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}$

Réjecteur : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{1+\tau^2 p^2}{1+2m\tau p+\tau^2 p^2}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{1+(j\omega)^2\tau^2}{1+2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}$

Déphaseur : $\mathrm{H(p)} = \mathrm{H}_0 \frac{1-2m\tau p+{}^2p^2}{1+2m\tau p+\tau^2 p^2}$ ou $\underline{\mathrm{H}}(j\omega) = \mathrm{H}_0 \frac{1-2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}{1+2mj\omega\tau+(j\omega)^2\tau^2}$

III. Comment étudier la réponse d'un système à un signal périodique ?

1. Décomposition d'un signal périodique quelconque en série de Fourier

Tout processus périodique dans le temps (ou dans l'espace) peut être représenté comme la superposition d'un nombre infini de processus harmoniques dont les pulsations forment une suite discrète.

On considère un signal $e(t)$ de forme quelconque $T-$ périodique, donc de fréquence $f=\frac{1}{T}$ de pulsation $\omega=2\pi f$. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit alors :

$$e(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))$$

$$\text{avec}\quad a_0=\frac{1}{T}\int_0^T e(t).\,dt \quad : \quad \text{valeur moyenne ou composante continue du signal } e(t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T e(t).\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T e(t).\sin(n\omega t)\,dt \ : \ \text{amplitude des harmoniques de rang n}$$

La première harmonique est le terme dit « fondamental » de la série de Fourier, la pulsation du fondamental est ω. Les harmoniques proprement dites sont les termes de pulsation $\omega_n=n\omega$ où $n\geq 2$.

<u>Propriétés importantes:</u>

- Si $e(t)$ est une fonction paire, $b_n=0,$ si $e(t)$ est une fonction impaire, $a_n=0.$
- Lorsque la composante continue est nulle, le signal est **alternatif**.

En physique, on écrit plutôt la décomposition sous la forme :

$$e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega t+\varphi_n) \quad avec \quad c_0=a_0 \quad , \quad c_n=\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2} \quad et \quad \varphi_n=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

(justification par la méthode complexe)

L'intérêt de cette notation est d'attribuer une amplitude c_n unique à la $n-$ième harmonique et de pouvoir synthétiser en un seul graphe le spectre des amplitudes des harmoniques de $e(t)$.

2. Représentation de la décomposition : spectre

Le spectre permet de représenter l'ensemble des coefficients intervenant dans la décomposition en série de Fourier. Le spectre d'une fonction périodique de fréquence $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ est discontinu ; il est non nul aux fréquences $f=n\frac{\omega_0}{2\pi}$. On peut représenter :

- le spectre en cosinus : ensemble des a_n ;
- le spectre en sinus : ensemble des b_n ;
- le spectre d'amplitude : ensemble des c_n ;
- le spectre de phase : ensemble des φ_n.

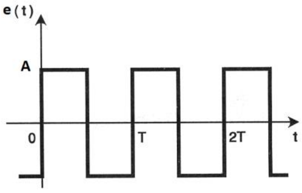
3. Décomposition en série de Fourier de signaux usuels

a. Fonction harmonique

Si $e(t) = A\cos(\omega_0 t)$ ou si $e(t) = B\sin(\omega_0 t)$, le spectre d'amplitude est constitué d'une raie unique à la pulsation ω_0.

b. Fonction créneau de valeur moyenne nulle

Si $e(t) = \begin{cases} -A & pour \quad t \in \left]-\frac{T}{2};0\right[\\ A & pour \quad t \in \left]0;\frac{T}{2}\right[\end{cases}$

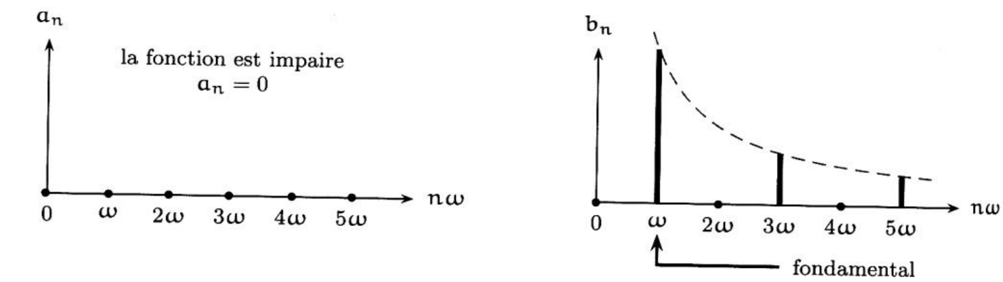


$a_0 = 0$ (valeur moyenne)

$a_n = 0$ (fonction impaire)

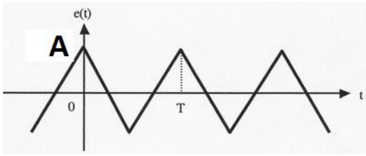
$$b_{2p} = 0$$
$$b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi}\frac{1}{2p+1}$$

$$e(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\big((2p+1)\omega t\big)$$



c. Signal triangulaire

Si $e(t) = \begin{cases} A\left(1+4\frac{t}{T}\right) & pour \quad t \in \left]-\frac{T}{2};0\right[\\ A\left(1-4\frac{t}{T}\right) & pour \quad t \in \left]0;\frac{T}{2}\right[\end{cases}$

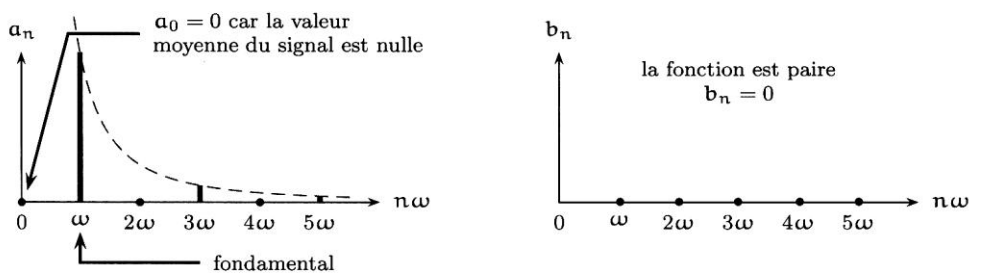


$a_0 = 0$ (valeur moyenne)

$b_n = 0$ (fonction paire)

$$a_{2p} = 0$$
$$a_{2p+1} = \frac{8A}{\pi^2}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$e(t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)\omega t\big)$$



DEMONSTRATION DES COEFFICIENTS DE FOURIER DE LA DECOMPOSITION DES SIGNAUX CARRES ET TRIANGULAIRE

I. Signal carré

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t).\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin(n\omega t)\,dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} A\sin(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[-\frac{A}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T}\left[-\frac{A}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} = \frac{2A}{Tn\omega}\left(-\cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) + \cos(0) + \cos(n\omega T) - \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{A}{n\pi}(2 - 2\cos(n\pi)) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b_{2p} = 0 \\ b_{2p+1} = \dfrac{4A}{\pi}\dfrac{1}{2p+1} \end{cases}$$

II. Signal triangulaire

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t).\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\left(1 - 4\frac{t}{T}\right)\cos(n\omega t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} A\left(1 + 4\frac{t}{T}\right)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\cos(n\omega t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} A\cos(n\omega t)\,dt - \frac{4A}{T}.\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega t)\,dt + \frac{4A}{T}\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\frac{A}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T}\left[\frac{A}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} + \frac{8A}{T^2}\left(-\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} t\cos(n\omega t)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{2A}{Tn\omega}\left(\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right) - \sin(0) + \sin(n\omega T) - \sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)\right) + \frac{8A}{T^2}\left(-\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} t\cos(n\omega t)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{8A}{T^2}\left(-\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} t\cos(n\omega t)\,dt\right)$$

$$Intégration\ par\ partie : \quad \int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx$$

$$On\ pose : \quad h' = \cos(n\omega t) \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \quad et \quad g = t \quad \rightarrow \quad g' = 1$$

$$b_n = \frac{8A}{T^2}\left(-\left[\frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\,dt + \left[\frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} - \int_{\frac{T}{2}}^{T} \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{8A}{T^2}\left(-\frac{T}{2n\omega}\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right) + \left[-\frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{T}{n\omega}\sin(n\omega T) - \frac{T}{2n\omega}\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right) - \left[-\frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right)$$

$$b_n = \frac{8A}{T^2n^2\omega^2}\left(-[\cos(n\omega t)]_0^{\frac{T}{2}} + [\cos(n\omega t)]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) = \frac{8A}{T^2n^2\omega^2}\left(-\cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) + 1 + 1 - \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{2A}{n^2\pi^2}(2 - 2\cos(n\pi)) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b_{2p} = 0 \\ b_{2p+1} = \dfrac{8A}{\pi^2}\dfrac{1}{(2p+1)^2} \end{cases}$$

4. Influence d'un système linéaire sur un signal périodique : filtrage

a. Principe

Un système linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ est soumis à un signal d'entrée périodique $e(t)$. $e(t)$ peut être décomposé en série de Fourier :

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(t)$$

Le signal de sortie $s_n(t)$ correspondant au signal d'entrée $e_n(t)$, harmonique de pulsation $n\omega$, est :

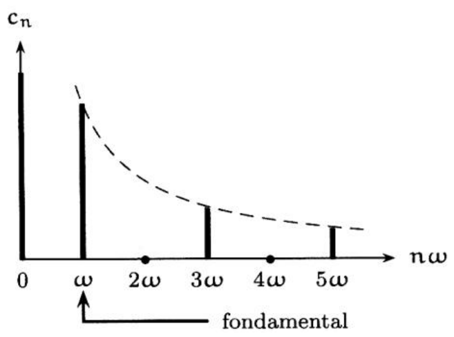
$$s_n(t) = G(n\omega)c_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$

La linéarité du système permet d'en déduire le signal de sortie :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n\omega)c_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$

- Veiller à bien prendre la pulsation $n\omega$ pour l'harmonique d'ordre n.
- Ne pas oublier la composante continue correspondant à la pulsation nulle, le terme de phase pouvant introduire un changement de signe lorsque $\varphi(\omega = 0) = \pm\pi$.

b. Filtrage d'un créneau par un passe-bas



Spectre d'amplitude (coefficients c_n)
du signal d'entrée $e(t)$

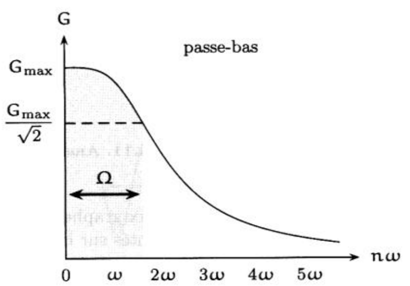
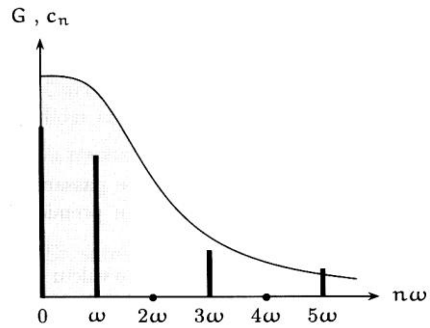
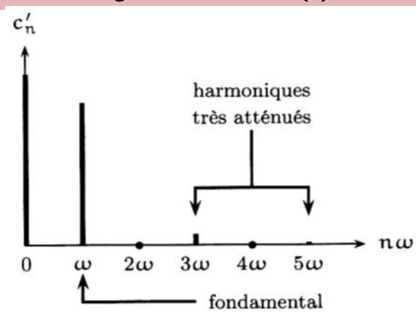


Diagramme du gain $G(\omega)$ du système
(passe bas)

Superposition des deux graphes

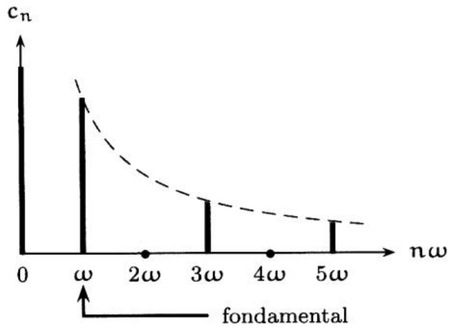


Allure du spectre (coefficients c'_n)
du signal de sortie $s(t)$



Sur cet exemple, seules subsistent de façon notable la composante continue et le fondamental : $s(t) \approx c'_0 + c'_1 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

c. Filtrage d'un créneau par un passe-bande



Spectre d'amplitude (coefficients c_n)
du signal d'entrée $e(t)$

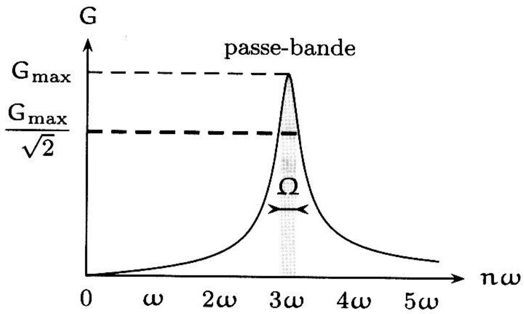
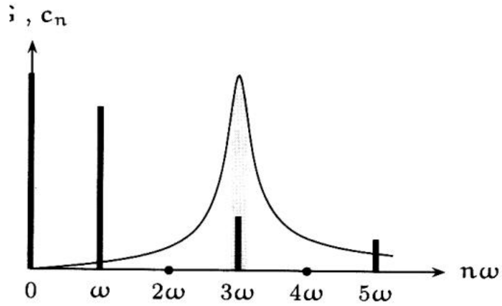
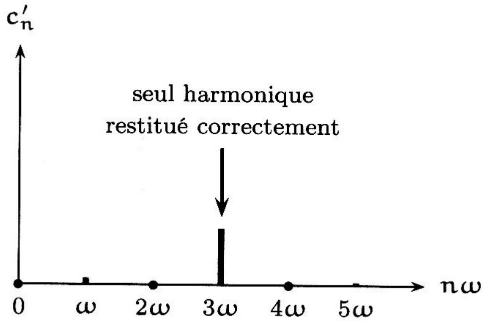


Diagramme du gain $G(\omega)$ du système
(passe bande tel que $\omega_r = 3\omega$)

Superposition des deux graphes



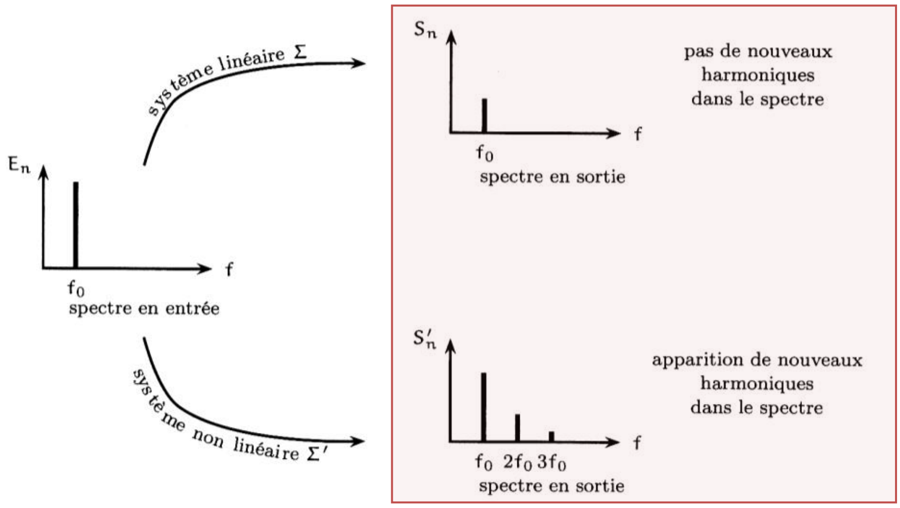
Allure du spectre (coefficients c'_n)
du signal de sortie $s(t)$



Comme le filtre est très sélectif, facteur de qualité Q très élevé, le signal de sortie est sinusoïdal sans composante continue. Si Q était moins élevé, il pourrait subsister d'autres raies dans le spectre du signal de sortie et celui-ci ne serait plus sinusoïdal.

5. Comment vérifier qu'un système réel est un système linéaire ?

Le critère de linéarité nous indique qu'un système est linéaire si sa réponse harmonique est harmonique.



IV. Stabilité des systèmes linéaires

1. Définition

Physiquement, il est impossible d'avoir un signal sinusoïdal infini. Il existe toujours dans un premier temps un régime transitoire.

Le régime transitoire correspond à la **solution de l'équation homogène (H)** :

$$\mathrm{D_0 s + D_1 \frac{ds}{dt} + \cdots + D_n \frac{d^n s}{dt^n} = 0}$$

Cette réponse, correspondant à une grandeur d'entrée nulle, est appelée **réponse libre ou régime libre**.

Un **système stable** est un système pour lequel la réponse libre (la solution générale de l'équation différentielle) temps vers 0.

2. Régime libre

La condition de stabilité ne porte pas sur le régime établi (solution particulière), mais sur le régime libre.

Un système est stable si son régime libre ne diverge pas. Au contraire, il est instable si le régime libre diverge.

3. Système d'ordre un

a. Coefficients de l'équation différentielle

L'équation différentielle dont le régime libre est solution est la suivante :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = 0$$

où τ est un paramètre homogène à un temps. On étudie la stabilité en traçant l'évolution dans le plan de phase $\left(s, \frac{ds}{dt}\right)$, dans lequel la trajectoire est rectiligne ; en effet, l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{s(t)}{\tau}$$

Les deux cas sont alors distingués par le signe de τ :

- si τ est positif, alors le point représentatif du système se rapproche de l'origine du système : le système est stable,
- si τ est négatif, alors le point représentatif du système s'éloigne de l'origine du système : le système est instable.

Un système du premier ordre est stable si et seulement si sa constante de temps est strictement positive. Autrement dit, le système est stable si les coefficients de l'équation différentielle D_0 et D_1 sont de même signe.

Remarque : Cette notion de stabilité est évidemment liée aux solutions en exponentielle réelle de l'équation différentielle, solutions qui ne divergent pas à la même condition (τ>0).

b. Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit en général

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{N_0 + N_1 j\omega}{D_0 + D_1 j\omega}$$

Un système du premier ordre est stable si les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert D_0 et D_1 sont de même signe.

4. Système d'ordre deux

a. Coefficients de l'équation différentielle

L'équation différentielle dont le régime libre est solution est la suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha\frac{ds}{dt} + \beta s = 0$$

où α et β sont des paramètres constants. Cette équation admet des solutions de la forme $s(t) = e^{rt}$ où r est la solution de l'équation caractéristique

$$r^2 + \alpha r + \beta = 0$$

qui admet en général deux solutions.

i. cas β<0

Dans ce cas, le discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ est forcément positif. Il y a alors deux racines réelles $r_1 et\, r_2$ telles que $r_1\, r_2 = \beta < 0$. Une de ces racines est donc positive, et le système est instable, puisqu'il y a un terme divergent.

ii. cas β>0

On pose $\beta = \omega_0^2$. On réécrit l'équation différentielle en posant $\alpha = \omega_0/Q$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

En multipliant cette équation par $\frac{ds}{dt}$ et en faisant passer le terme $\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}$ à droite, on obtient

$$\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s\frac{ds}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

où l'on reconnait à gauche la dérivée par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 s^2\right)$$

Si on considère le signal s(t) associé à un système solide ressort x(t), alors on reconnait, à la masse du système m prêt, dans le premier terme l'énergie cinétique $1/2mv^2$ et dans le deuxième terme l'énergie potentielle du ressort $1/2kx^2$. La somme est donc l'énergie totale E. On peut donc, par analogie, réécrire l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

qui s'interprète en fonction du signe de Q

- Q>0 signifie que l'énergie diminue au cours du temps. On a donc un système stable,
- Q<0 signifie que l'énergie augmente au cours du temps. On a donc un système instable,
- Q=0 est la limite de stabilité du système.

Ces résultats s'interprètent, dans l'analogie mécanique, comme une situation avec des frottements, une situation avec frottements "négatifs", et une situation sans frottements.

iii. Conclusion

On peut alors résumer les résultats sous forme d'un tableau

	β<0	**β>0**
α>0	Instable	Stable
α<0	Instable	Instable
α=0	instable	Limite de stabilité

Le système est stable si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont tous de même signe.

Remarque : Cette notion de stabilité est évidemment liée aux solutions en exponentielle réelle de l'équation différentielle, solutions qui ne divergent pas à la même condition.

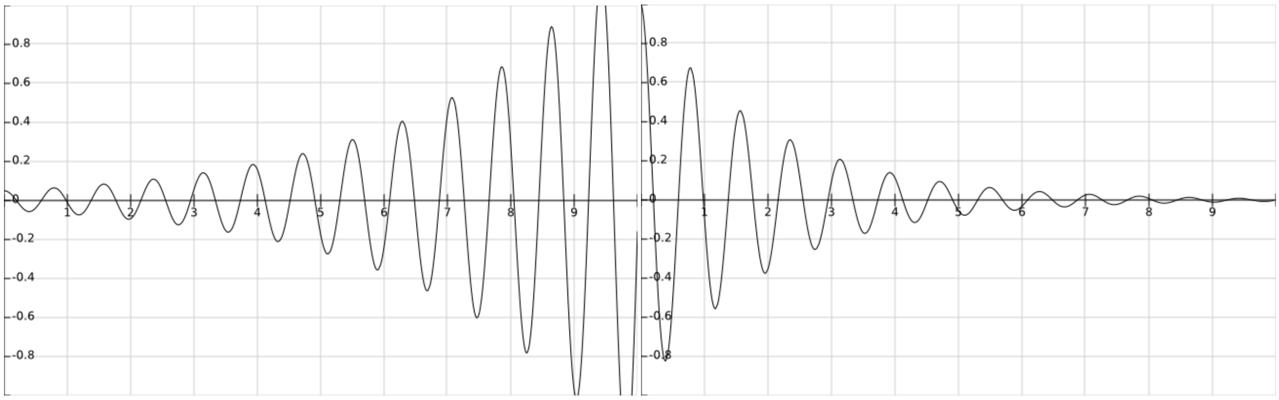
b. Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit en général

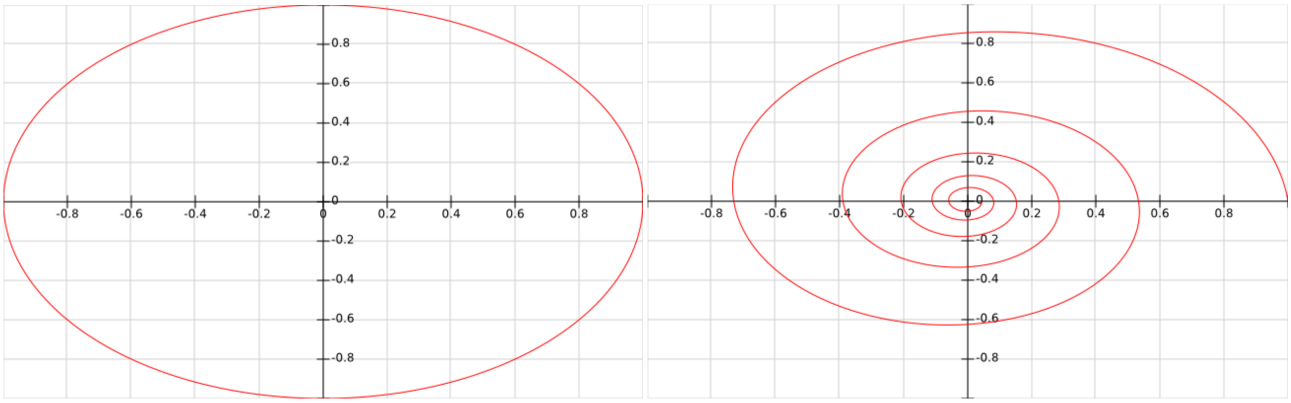
$$\underline{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{\mathrm{s}}}{\underline{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{N}_0 + \mathrm{N}_1\mathrm{j}\omega + \mathrm{N}_2(\mathrm{j}\omega)^2}{\mathrm{D}_0 + \mathrm{D}_1\mathrm{j}\omega + + \mathrm{D}_2(\mathrm{j}\omega)^2}$$

Un système du premier ordre est stable si les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont tous de même signe.

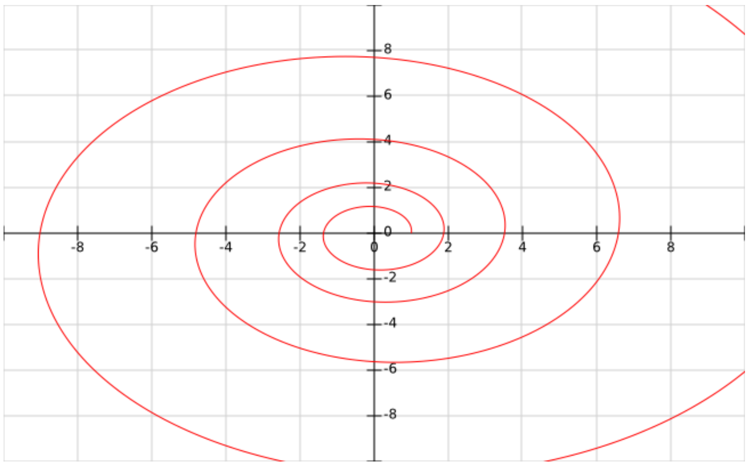
c. Allure de s(t) et portrait de phase



s(t) pour un système instable (gauche) et pour un système stable (droite)



Portraits de phase pour un système en limite de stabilité (gauche) et stable (droite), conditions initiales (1,0)



Portrait de phase pour un système instable, conditions initiales (1,0)