

chapitre 9. INTERFEROMETRE DE MICHELSON

I. Description.....	2
1. Division d'amplitude.....	2
2. La compensatrice.....	3
3. Modèle simplifié.....	3
4. Les trois situations importantes.....	5
5. Cohérence spatiale.....	6
III. Réglage en « coin d'air ».....	7
1. Éclairage et localisation.....	7
2. Franges d'égale épaisseur.....	7
a. Différence de marche.....	7
b. Eclairement.....	8
3. Observation des franges.....	9
a. Source à l'infini, de faible étendue.....	9
b. Observation.....	9
IV. Réglage en « lame d'air ».....	10
1. Localisation.....	10
2. Différence de marche.....	10
3. Rayons des anneaux.....	11
a. Expression de l'éclairement.....	11
b. Ordre d'interférence.....	11
c. Interfrange.....	11
d. Rayons des anneaux brillants.....	Erreur ! Signet non défini.
4. Contact optique.....	12
V. Largeur spectrale de la source – cohérence temporelle.....	13
1. Doublet spectral.....	13
2. Profil spectral rectangulaire.....	16
3. Largeur spectrale et longueur de cohérence.....	Erreur ! Signet non défini.
4. Cas de la lumière blanche.....	18
5. Spectre cannelé.....	18

chapitre 9. INTERFEROMETRE DE MICHELSON

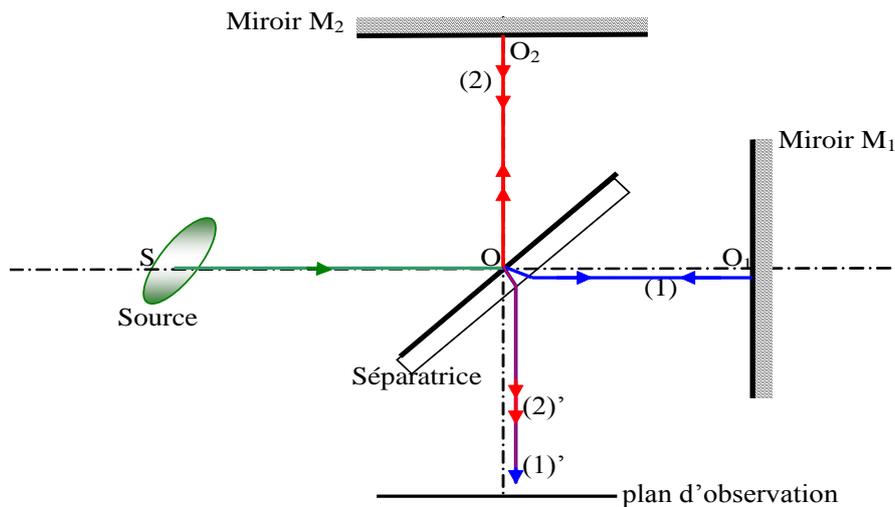
L'interféromètre de Michelson est un interféromètre à division d'amplitude.

Son étude nous conduira à une approche expérimentale et théorique des interférences lumineuses.

I. Description

1. Division d'amplitude

Schéma de principe d'un interféromètre de Michelson :



La lame séparatrice, dont l'une des faces est légèrement métallisée pour devenir semi-réfléchissante, assure la division d'amplitude.

Elle est placée parallèlement au plan bissecteur de deux miroirs M_1 et M_2 à peu près perpendiculaires entre eux.

- Un rayon incident issu de la source est partiellement transmis vers le miroir M_1 et partiellement réfléchi vers le miroir M_2 .

Les pouvoirs de transmission T et de réflexion R de la couche semi-réfléchissante sont sensiblement égaux ($R = T = 0,5$). Les intensités correspondant aux réflexions verre-air ou air-verre seront considérées comme négligeables. Cependant, expérimentalement, elles peuvent engendrer des images parasites gênantes.

- Après réflexion sur les miroirs M_1 et M_2 , les rayons (1) et (2) rencontrent de nouveau la face semi-réfléchissante de la séparatrice.
- Les rayons (1') et (2') qui transportent chacun un quart de l'énergie incidente sont **cohérents**.

Le miroir M_1 , appelé « miroir mobile », est mobile en translation le long de l'axe OO_1 (une vis de réglage) et en rotation autour de O_1 (deux vis de réglage) .

Le miroir M_2 , appelé « miroir fixe », est en réalité très légèrement mobile en rotation autour de O_2 (deux vis de réglage fin).

Les segments OO_1 et OO_2 sont appelés bras de l'interféromètre de Michelson.

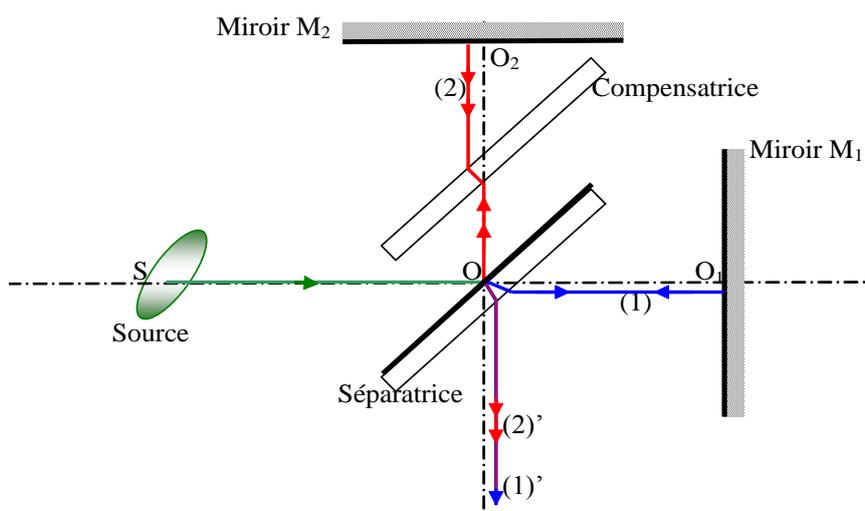
2. La compensatrice

Le trajet du rayon (1) comporte trois traversées du verre de la séparatrice et une seule pour le trajet (2).

Il est important que la traversée de la lame de verre n'introduise pas de différence de marche entre les deux faisceaux, et ceci :

- quelle que soit l'incidence,
- quelle que soit les longueurs d'onde des radiations utilisées (dispersion du verre).

Pour rétablir l'égalité des chemins optiques dans le verre, on place, sur le trajet (2) parallèlement à la séparatrice, une lame compensatrice C_p , identique à la séparatrice, sans traitement de surface.

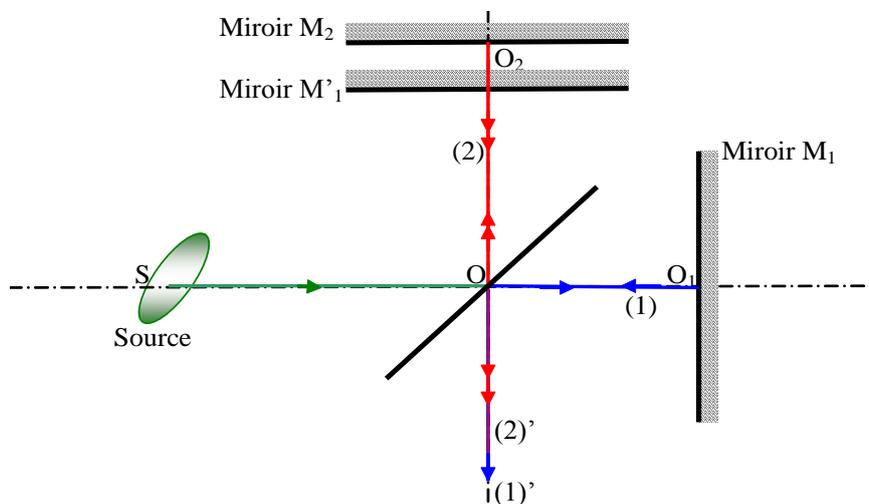


3. Modèle simplifié

L'ensemble « séparatrice compensatrice » peut être assimilé à un plan semi-réfléchissant, confondu avec la face traitée de la séparatrice.

On appelle M'_1 l'image de M_1 par ce miroir semi - réfléchissant.

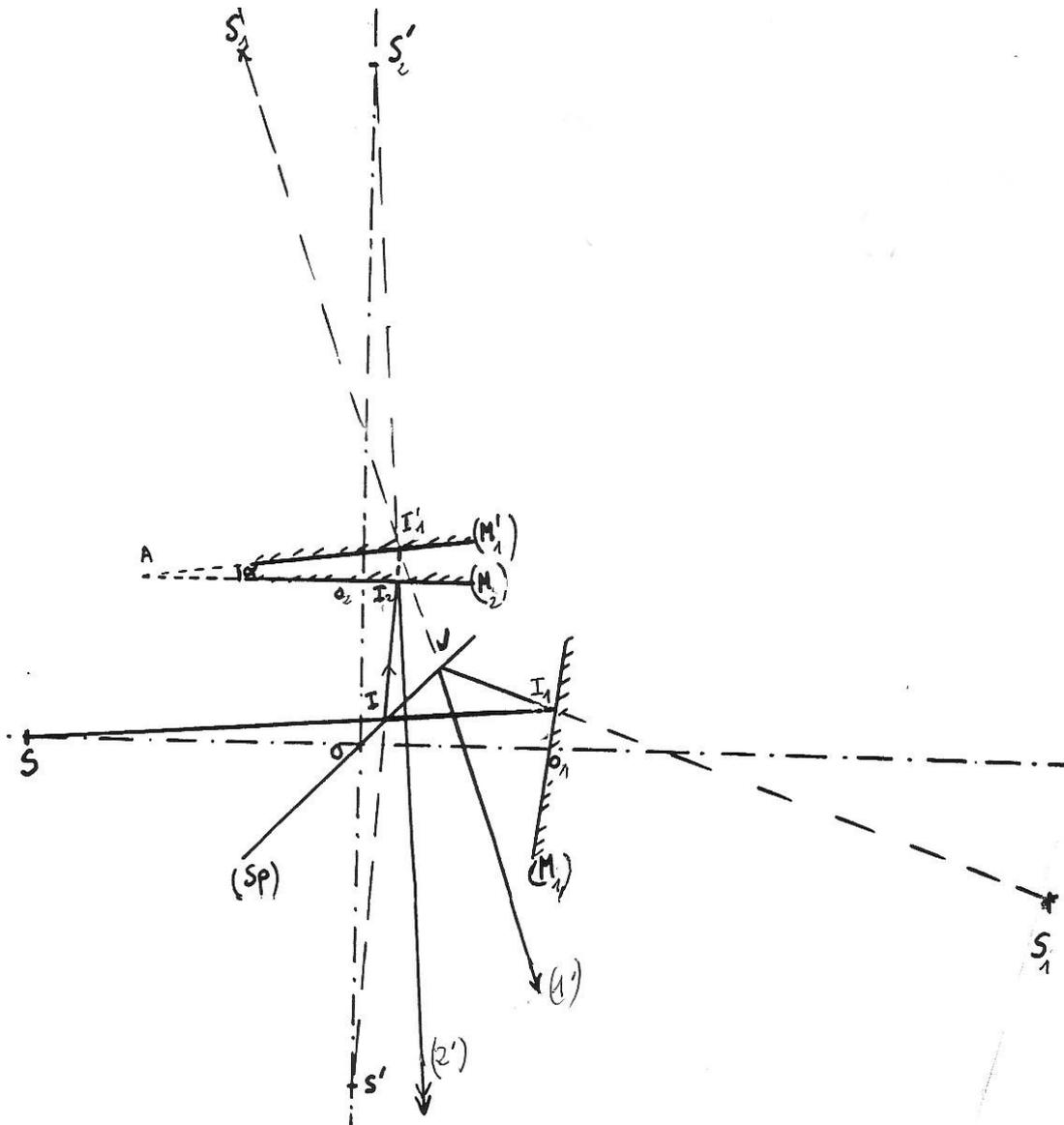
Un observateur regardant arriver les rayons (1)' et (2)' voit donc, « à travers la séparatrice », les miroirs M'_1 et M_2 .



Soit S un point de la source :

- Le rayon (1) :
 - traverse la séparatrice
 - il se réfléchit sur M_1 : le rayon réfléchi semble être issu de S_1 image de S par M_1
 - il se réfléchit alors sur la séparatrice : le rayon (1)' semble être issu de S'_1 image de S_1 par la séparatrice.

 - Le rayon (2) :
 - se réfléchit sur la séparatrice : le rayon réfléchi semble être issu de S' image de S par la séparatrice.
 - il se réfléchit alors sur M_2 , le rayon (2)' semble être issu de S'_2 image de S' par M_2 .
 - il traverse la séparatrice
- ⚠ Pour l'observateur, les deux rayons qui interfèrent (1)' et (2)' semblent issus des sources secondaires S'_1 et S'_2 , sources secondaires.
- ⚠ S'_1 est aussi l'image de S' par M'_1 (miroir virtuel image de M_1 par la séparatrice).



Calcul de la différence de marche en un point M quelconque :

$$\delta = (SI_2M) - (SI_1JM)$$

Les différences de marche introduites éventuellement lors des réflexions se compensent et le milieu de propagation est l'air d'indice égal à 1, on obtient (cf. figure ci-dessus) :

$$\delta = (SI + II_2 + I_2M) - (SI_1 + I_1J + JM)$$

$$\text{Or } SI_1 = S_1I_1 \rightarrow SI_1 + I_1J = S_1J = S'_1J \rightarrow SI_1 + I_1J + JM = S'_1J + JM = S'_1M$$

$$\text{Et } SI = S'I \rightarrow SI + II_2 = S'I + II_2 = S'I_2 = S'_2I_2 \rightarrow SI + II_2 + I_2M = S'_2I_2 + I_2M = S'_2M$$

$$\rightarrow \delta = S'_2M - S'_1M$$

L'interféromètre de Michelson est modélisable par une lame d'air comprise entre le miroir M_2 et le miroir virtuel M'_1 (image de M_1 par la séparatrice).

Cette lame est éclairée par une source S' (image de la source principale S par la séparatrice). Les deux sources secondaires sont S'_1 et S'_2 images de S' par M'_1 et M_2 .

4. Les trois situations importantes

D'après le chapitre 8, les zones d'égal éclairement sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S'_1 et S'_2 .

Les interférences sont généralement observées dans un plan perpendiculaire au bras O_2O (plan parallèle à M_2).

- Si les miroirs M'_1 et M_2 forment un angle faible (cf. figure ci-dessus),
 - $S'_1S'_2$ est pratiquement parallèle au plan d'observation ;
 - Les **franges sont rectilignes**.
 - L'interféromètre est « **réglé en coin d'air** ».
- Si les miroirs M'_1 et M_2 sont parallèles,
 - $S'_1S'_2$ est perpendiculaire au plan d'observation
 - Les **franges sont circulaires**.
 - L'interféromètre est alors « **réglé en lame* d'air** ».(* sous entendu : lame à faces parallèles)
- Si les deux miroirs M'_1 et M_2 sont confondus,
 - Il y a contact entre le miroir réel M_2 et le miroir virtuel M'_1 : c'est le « **contact optique** »
 - $\delta = 0$ en tout point de l'écran d'observation
 - L'éclairement est uniforme.

*A priori, il est possible d'obtenir des situations intermédiaires et d'observer les franges hyperboliques. Nous n'y parviendrons expérimentalement que lorsque la source est un **laser**. Associé à une lentille de faible distance focale (objectif de microscope par exemple), il permet d'obtenir une source ponctuelle très lumineuse.*

Les sources classiques (lampes spectrales ou lampes blanches à incandescence) doivent être étendues (c'est à dire non ponctuelles) pour être suffisamment lumineuses. Il en découle la question de la cohérence spatiale que nous allons aborder dans le paragraphe qui suit.

5. Cohérence spatiale

Cette question est à bien distinguer de la question de la **cohérence temporelle** qui concerne les trains d'ondes émis par les sources.

Les sources classiques doivent être étendues pour être suffisamment lumineuses.

La linéarité des équations de Maxwell permet de considérer une **source étendue** comme la superposition de sources ponctuelles qui sont, bien sûr, **incohérentes** entre elles :

- En un point M, où l'on observe les interférences, il y a addition des éclairagements des ondes issues de chacun des points sources.
- L'éclairage résultant est, en général, uniforme.
- Il y a **brouillage** des interférences.

L'expérience montre que, lorsque la source est d'étendue limitée, les franges d'interférences sont observables sur une surface bien précise appelée **surface de localisation** (et pas dans tout le champ d'interférences).

Cette surface correspond à l'ensemble des points M où les différences de marche $\delta_s(M) = (SII_2M) - (SI_1JM)$ ne dépendent quasiment pas du point source S. On dit que les interférences sont **localisées**.

On admet que cette condition est équivalente au théorème de localisation :

Dans le cas d'un système interférentiel par division d'amplitude, les interférences obtenues avec une source large sont localisées au voisinage d'une surface définie par l'intersection des rayons émergents issus d'un même rayon incident.

Résumons la question de la **cohérence spatiale**, liée à l'étendue de la source.

- Source ponctuelle : interférences non localisées (pas de problème de cohérence spatiale).
- Source étendue (d'extension limitée) : interférences localisées (problème de cohérence spatiale).

- ⚠ La surface de localisation n'existe pas toujours. Son existence dépend des conditions d'éclairage.
- ⚠ Une augmentation importante de l'étendue de la source conduit toujours au brouillage des franges.

II. Réglage en « coin d'air »

Le miroir M_2 et le miroir virtuel M'_1 forment un dièdre d'arête A et d'angle α . Cet angle est très faible.

1. Éclairage et localisation

Nous utilisons une source classique donc étendue.

Si la source est à distance finie, les deux émergents issus d'un même incident ne se coupent pas en général.

La surface de localisation n'existe que si cette source est à l'infini.

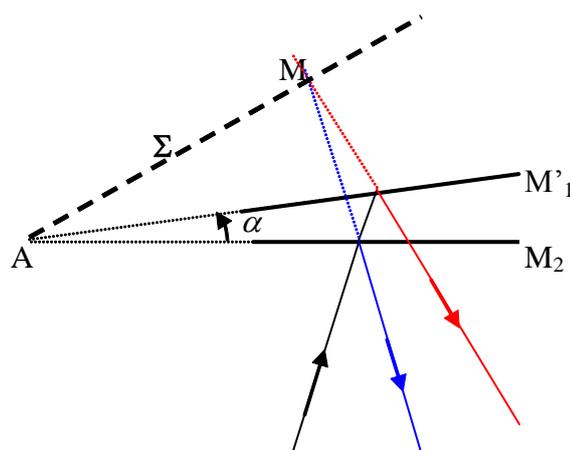
Source à l'infini :

- les miroirs sont éclairés, sous incidence normale, par un faisceau de lumière parallèle
- il est obtenu à l'aide d'un collimateur
- une pupille est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

La surface de localisation Σ est un plan contenant l'arête A du dièdre, très voisin du plan de M'_1 (α est très petit).

- △ Elle est confondue avec M'_1 lorsque le faisceau incident est perpendiculaire à M_2 .

2.



Observation des interférences :

- directement à l'œil nu, si la lumière n'est pas trop intense, en accommodant au voisinage de M_2 .
- sur un écran, placé dans le plan conjugué de M_2 par une lentille convergente.

2. Franges d'épaisseur

a. Différence de marche

Expérimentalement, nous choisissons une incidence nulle, la différence de marche s'écrit alors :

$$\delta(M) = 2e(M) \approx 2x(M)\alpha$$

Avec $e(M)$ épaisseur du coin d'air au point M .

x distance entre l'arête et le point d'impact du rayon sur le miroir M'_1 .

Démonstration :

Les deux rayons réfléchis issus du même incident interfèrent en M .

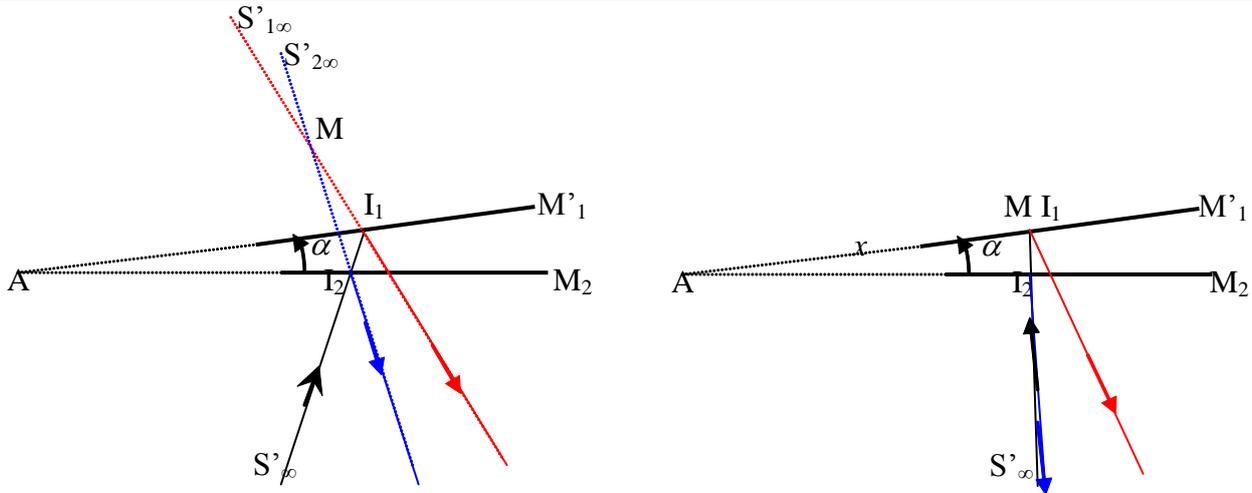
La différence de marche en M est :

$$\delta(M) = (S'_\infty M)_1 - (S'_\infty M)_2 = S'_{1\infty}M - S'_{2\infty}M$$

$$\text{Or } \begin{cases} S'_{1\infty}M = S'_{1\infty}I_1 - I_1M = S'_\infty I_1 - I_1M \\ S'_{2\infty}M = S'_{2\infty}I_2 - I_2M = S'_\infty I_2 - I_2M \end{cases} \quad \text{Et } S'_\infty I_1 - S'_\infty I_2 = I_2 I_1$$

$$\rightarrow \delta(M) = I_2 I_1 - I_1 M + I_2 M$$

⚠ Les chemins optiques virtuels (ici $(I_1 M)$ et $(I_2 M)$) sont comptés négativement.



La différence de marche peut s'exprimer en fonction de l'angle α du coin d'air, de l'angle d'incidence i et de la distance x de l'arête A au point M .

Sous une incidence nulle, M est confondu avec I_1 :

$$\delta(M) = 2I_2 I_1 = 2e(M) = 2AM \sin \alpha \approx 2x\alpha$$

b. Eclairement

L'éclairement s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_0} \right) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\alpha x}{\lambda_0} \right)$$

Avec \mathcal{E}_0 l'éclairement en M lorsque l'un des miroirs est occulté.

Un éclairement donné correspond à une épaisseur donnée e du coin d'air : les franges d'égal éclairement sont des franges d'égal épaisseur.

Les franges **d'égal épaisseur** produites par l'interféromètre de Michelson réglé en **coin d'air**, éclairé par une source (faiblement) étendue **à l'infini** :

- sont localisées sur le **plan** des miroirs (quasi confondus) ;
- sont **rectilignes**, parallèles à l'arête du dièdre formé par les deux miroirs. $\mathcal{E} = cte \leftrightarrow x = cte$

c. Interfrange

L'interfrange, $i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$ est inversement proportionnelle à l'angle α du coin d'air.

Démonstration :

Les abscisses des franges brillantes correspondent aux valeurs entières de l'ordre d'interférence :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} = k, k \in \mathbb{Z}, \quad \rightarrow \quad x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

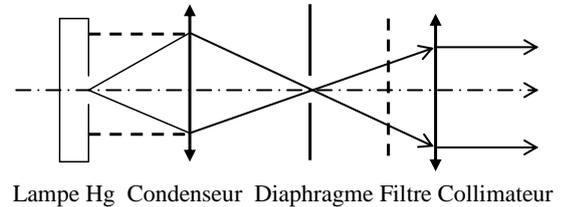
L'interfrange est : $i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$

3. Observation des franges

a. Source à l'infini, de faible étendue

On utilise la source suivante :

- un diaphragme à iris (diaphragme circulaire dont on peut régler le diamètre)
- éclairé par une lampe spectrale
- à travers un condenseur, lentille de faible focale ($f'_c = 50 \text{ mm}$) permettant de concentrer (condenser) sur le diaphragme la lumière émise par la lampe.
- Le trou source est placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente, le collimateur.



- ⚠ Un cache cylindrique (— — —) placé entre la lampe et le condenseur permet d'éliminer une importante lumière parasite.
- ⚠ Le condenseur doit être placé :
 - assez près de la lampe pour qu'il intercepte entièrement le cône de lumière émis,
 - mais assez loin de la lampe pour que son image ne soit pas trop agrandie, auquel cas une grande partie de la lumière émise ne traverserait pas le diaphragme
 - le meilleur compromis consiste à utiliser le condenseur dans les conditions de Silbermann (lampe et diaphragme à $2f'_c (= 10 \text{ cm})$ du condenseur).
- ⚠ Le réglage du collimateur se fait par auto collimation.

b. Observation

Pour distinguer les franges, l'interfrange ne doit pas être trop faible. Il est donc nécessaire d'avoir un angle α très petit.

- Réglage : superposer le mieux possible les deux faisceaux réfléchis par les miroirs.

Ces deux faisceaux de lumière parallèle peuvent être observés, à la sortie de l'interféromètre, dans le plan focal d'une lentille convergente.

- Réglage : conjuguer le plan des miroirs (plan de localisation) avec un écran par une lentille convergente (par exemple de distance focale 15 cm).

Exemple : distance lentille - miroir : 18 cm / distance lentille - écran : 90 cm → grandissement -5 .

Les franges ne sont observables que si la différence de marche, $\delta = 2e$, est inférieure à la longueur de cohérence de la source.

- Réglage : translater le miroir M_1 jusqu'à l'obtention d'un bon contraste.

Les vis de réglage de l'orientation de M_2 permettent d'orienter les franges et de régler l'interfrange. En augmentant le plus possible l'interfrange (jusqu'à obtenir un éclairage uniforme du champ d'observation), on atteint une valeur très faible de l'angle α . Alors les miroirs M'_1 et M_2 sont quasi parallèles : l'interféromètre est réglé « en lame d'air ».

III. Réglage en « lame d'air »

Le miroir M_2 et le miroir virtuel M'_1 délimitent une lame d'air, à faces parallèles, d'épaisseur constante e .

1. Eclairage et localisation

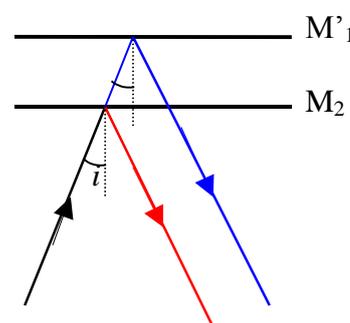
Les deux rayons réfléchis issus du même incident sont parallèles entre eux. Ils convergent à l'infini.

Les interférences produites par l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source étendue **sont localisées à l'infini.**

Observation des interférences :

- écran placé à grande distance de l'interféromètre
- ou dans le plan focal image d'une lentille convergente (distance focale assez grande (50 cm)).

On observe des anneaux puisque l'axe $S'_1S'_2$ est perpendiculaire au plan d'observation, lui-même parallèle aux plans des miroirs M'_1 et M_2 .



2. Franges d'égale inclinaison

a. Différence de marche

La différence de marche s'écrit : $\delta = S'_1H = 2e \cos i$

Démonstration :

$$\delta(M) = (S'M_\infty)_1 - (S'M_\infty)_2 = S'_1M_\infty - S'_2M_\infty$$

La distance entre les deux sources secondaires est $a = 2e$.

$$\delta = S'_1H + HM_\infty - S'_2M_\infty = S'_1H = 2e \cos i \quad \text{car} \quad HM_\infty = S'_2M_\infty$$

b. Eclairissement

L'éclairissement est :

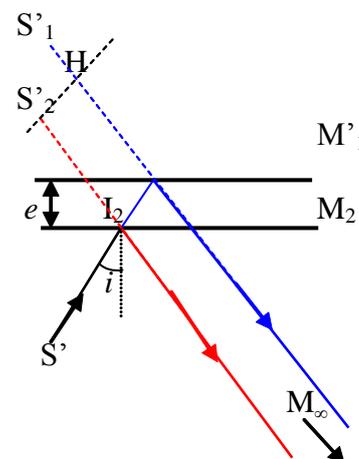
$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0} \right)$$

Il ne dépend que de l'angle d'incidence i c'est à dire l'inclinaison des rayons incidents par rapport à la normale aux miroirs. Les franges d'égal éclairissement sont des franges d'égale inclinaison.

Les franges **d'égale inclinaison** produites par l'interféromètre de Michelson réglé en **lame d'air** et éclairé par une source étendue à **distance finie** :

- sont localisées à **l'infini**;
- sont **circulaires**, d'axe perpendiculaire aux plans des deux miroirs.

⚠ Pour observer plusieurs franges, il faut nécessairement plusieurs inclinaisons. Un éclairage par un faisceau de lumière parallèle ne peut convenir. La source est nécessairement à distance finie.



3. Rayons des anneaux

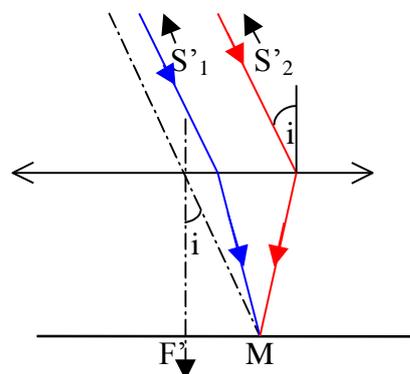
a. Observation des interférences

Les interférences sont localisées à l'infini, donc observées dans le plan focal image d'une lentille convergente, de distance focale f' , dont l'axe optique est $S'_1S'_2$.

Le système présente une symétrie de révolution autour de cet axe : les franges sont des anneaux centrés sur le foyer image F' .

La distance ρ entre un point M de l'écran et ce foyer F' est :

$$\rho = F'M = f' \tan i \quad \rightarrow \quad \tan i = \frac{\rho}{f'}$$



b. Expression de l'éclairement

L'éclairement en M s'écrit :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0} \right) \quad \text{or} \quad \cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} \quad \text{et} \quad \tan i \frac{\rho}{f'} \approx i \quad \text{au deuxième ordre}$$

$$\mathcal{E}(M) \approx 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right) \right)$$

c. Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence est donné par :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right)$$

Démonstration :

L'angle i étant faible : $\delta = 2e \cos i \approx 2e \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) = 2e \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right)$.

⚠ L'ordre est une fonction décroissante du rayon ρ des anneaux.

L'ordre d'interférence peut aussi s'écrire en fonction de l'ordre au centre ($\rho = 0$) qui est : $p_{max} = \frac{2e}{\lambda_0}$:

$$\rightarrow \quad p \approx p_{max} \left(1 - \frac{\rho^2}{2f'^2} \right)$$

d. Rayon des anneaux et interfrange

Le rayon associé à l'ordre p est :

$$\rho_p \approx f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_{max}} \right)} = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0 p}{2e} \right)}$$

D'où l'interfrange :

$$i = \rho_p - \rho_{p+1} = f' \left(\sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_{\max}} \right)} - \sqrt{2 \left(1 - \frac{p+1}{p_{\max}} \right)} \right)$$

⚠ L'interfrange est une fonction croissante de l'ordre p : plus on s'éloigne du centre, plus les anneaux sont serrés.

Le rayon du $K^{\text{ème}}$ anneau brillant à partir du centre s'écrit :

$$\rho_K \approx f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (K + \varepsilon - 1)}$$

Démonstration :

Le premier anneau brillant à partir du centre correspond au premier ordre entier, soit :

$$p = p_{\max} - \varepsilon = \frac{2e}{\lambda_0} - \varepsilon = q_1$$

où ε désigne la partie fractionnaire de l'ordre au centre p_{\max} .

Le $K^{\text{ème}}$ anneau brillant correspond à l'ordre :

$$q_K = q_1 - (K - 1) = p_{\max} - \varepsilon - K + 1$$

Son rayon est :

$$\rho_K \approx f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p_{\max} - \varepsilon - K + 1}{p_{\max}} \right)} = f' \sqrt{2 \frac{K + \varepsilon - 1}{p_{\max}}} = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (K + \varepsilon - 1)}$$

Ainsi, l'observation des anneaux renseigne sur l'épaisseur e de la lame :

- Comme $\rho_p \approx f' \sqrt{2 - \frac{\lambda_0 p}{e}}$, le rayon d'un anneau d'ordre p donné diminue lorsque l'épaisseur e de la lame diminue : , on voit les anneaux disparaître au centre.
- Le rayon du $K^{\text{ème}}$ anneau brillant est d'autant plus grand que l'épaisseur est faible : lorsque l'épaisseur de la lame diminue, le nombre d'anneaux observables diminue et ceux-ci sont de plus en plus espacés.

4. Contact optique

Pour approcher le contact optique, on translate le miroir M_1 de sorte à faire rentrer les anneaux au centre ; le nombre des anneaux observables diminue ; lorsque le premier anneau sombre sort du champ d'observation, celui-ci apparaît comme uniformément éclairé.

Cette situation correspond au **contact optique** : en chaque point M de l'écran les deux rayons émergents de l'interféromètre sont en phase, la différence de marche est nulle.

IV. Largeur spectrale de la source – cohérence temporelle

Aucune source n'émet une radiation strictement monochromatique ; l'onde émise est en réalité la superposition d'ondes monochromatiques dont la fréquence appartient à un domaine plus ou moins restreint.

Une source est décrite par son **profil spectral** donnant l'intensité émise en fonction de la fréquence ν , ou plutôt du nombre d'ondes $\sigma = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda_0}$.

L'intensité émise dans la bande infiniment fine de largeur spectrale $d\sigma$ s'écrit : $dI = I_\sigma(\sigma)d\sigma$; cette relation définit l'**intensité spectrale** $I_\sigma(\sigma)$.

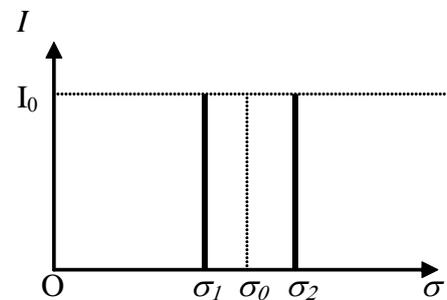
Nous envisagerons 3 cas :

- doublet spectral (deux raies supposée monochromatiques, de fréquences très voisines ;
- profil spectral rectangulaire (permettant d'approcher le profil gaussien) ;
- lumière blanche.

1. Doublet spectral

Un doublet spectral est constitué de 2 raies fines de longueurs d'onde voisines émises par une lampe spectrale. Nous supposons ces deux raies monochromatiques et de même intensité.

Exemple : doublet jaune du sodium, $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sigma_1} = 589,6 \text{ nm} \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sigma_2} = 589,0 \text{ nm} \end{cases}$



a. Eclairement

L'éclairement peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M \right) \cos \left(2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{cases}$$

Démonstration :

Deux sources de fréquences différentes sont incohérentes, leurs intensités s'ajoutent.

A la sortie de l'interféromètre :

- éclairement dû à la première : $\mathcal{E}_1(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta_M))$,

- éclairement dû à la seconde : $\mathcal{E}_2(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta_M))$,

- éclairement résultant : $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) = 2\mathcal{E}_0(2 + \cos(2\pi\sigma_1\delta_M) + \cos(2\pi\sigma_2\delta_M))$.

$$\rightarrow \mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right) \delta_M \right) \cos \left(2\pi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \delta_M \right) \right)$$

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0(1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta_M) \cos(2\pi\sigma_0\delta_M)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 & \text{largeur spectrale} \\ \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \text{valeur centrale} \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{1}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \\ \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} + \frac{1}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}} \right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 - \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2} \approx \frac{1}{\lambda_0} \end{cases}$$

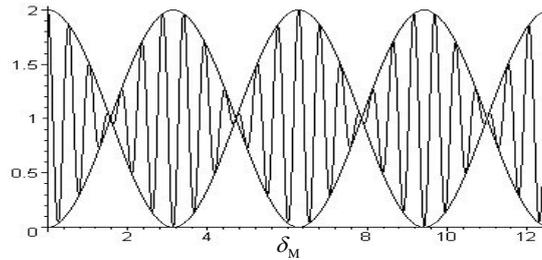
L'éclairément peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M \right) \cos \left(2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right) \right)$$

Nous reconnaissons le produit de deux fonctions sinusoïdales de δ_M de périodes très différentes :

- λ_0 pour $\cos \left(2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right)$ avec $\frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \gg \lambda_0$ car $\lambda_0 \gg \Delta\lambda$
- $\frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ pour $\cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M \right)$

Ainsi $V = \left| \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M \right) \right|$ peut être considérée comme l'amplitude, lentement variable, de $\cos \left(2\pi \frac{\delta_M}{\lambda_0} \right)$.



Exemple : Pour le sodium $\begin{cases} \lambda_0 = 589,3 \text{ nm} \\ \Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} \end{cases} \rightarrow \frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = 1964\lambda_0$

b. Contraste

Le contraste, ou visibilité, des franges s'écrit :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = V = \left| \cos\left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M\right) \right|$$

Démonstration :

L'éclairement maximal correspond à $\mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0(1 + V)$

L'éclairement minimal à $\mathcal{E}_{min} = 4\mathcal{E}_0(1 - V)$.

$$\rightarrow C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = V$$

$$C = |\cos(\pi\Delta\sigma\delta_M)| = |\cos(\pi(\sigma_2 - \sigma_1)\delta_M)| = \left| \cos\left(\pi\left(\frac{\delta_M}{\lambda_2} - \frac{\delta_M}{\lambda_1}\right)\right) \right| = |\cos(\pi(p_2 - p_1))|$$

Un contraste maximal correspond à une différence de marche δ_M telle que les ordres $p_1 = \frac{\delta_M}{\lambda_1}$ et $p_2 = \frac{\delta_M}{\lambda_2}$ sont décalés d'un entier (coïncidences : deux franges brillantes coïncident) :

$$V = \left| \cos\left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M\right) \right| = |\cos(\pi(p_2 - p_1))| = 1 \quad \text{pour} \quad \delta_M = k \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, k \in \mathbb{Z}$$

Un contraste minimal correspond à une différence de marche δ_M telle que les ordres $p_1 = \frac{\delta_M}{\lambda_1}$ et $p_2 = \frac{\delta_M}{\lambda_2}$ sont décalés d'un demi entier impair (anticoïncidences : une frange brillante coïncide avec une frange sombre) :

$$V = \left| \cos\left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta_M\right) \right| = |\cos(\pi(p_2 - p_1))| = 0 \quad \text{pour} \quad \delta_M = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda_0^2}{\Delta\lambda}, k \in \mathbb{Z}$$

Application :

L'interféromètre de Michelson, éclairé par une lampe à vapeur de sodium, est réglé en lame d'air ; au voisinage du centre des anneaux : $\delta_M = 2e \cos i \approx 2e$. Le contraste s'annule pour :

$$e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$$

Cette annulation du contraste (brouillage des anneaux) apparaît effectivement lors de la translation du miroir M_1 . Entre deux brouillages consécutifs on mesure : $\Delta e = 0,29 \text{ mm}$.

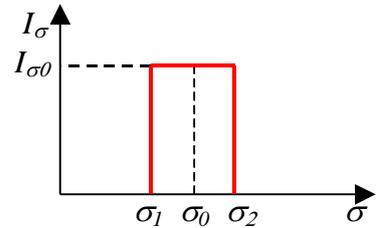
On peut déterminer l'intervalle $\Delta\lambda$ séparant les deux raies d'un doublet :

$$\Delta e = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta e} = 0,6 \text{ nm} \quad (\lambda_0 = 589 \text{ nm} \quad \text{pour le doublet jaune du sodium.})$$

2. Profil spectral rectangulaire

Ce profil ne présente pas de caractère réel, mais il permet d'approcher le profil gaussien.

Il s'agit d'une source émettant un ensemble continu de raies, de même amplitude, de fréquences $\nu \in [\nu_1; \nu_2]$ ($\nu = \frac{c}{\lambda} = c\sigma$), de largeur $d\nu$ très faible.



a. Eclairement

L'éclairement peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta_M) \cos(2\pi\sigma_0\delta_M))$$

Démonstration :

Avec $\mathcal{E}_0 = I_{\sigma_0}\Delta\sigma$ l'éclairement total de la source et $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$

L'éclairement dû à l'une de ces raies est :

$$d\mathcal{E}(M) = 2d\mathcal{E}_0(1 + \cos(2\pi\sigma\delta_M)) \quad \text{avec} \quad d\mathcal{E}_0 = I_{\sigma_0}d\sigma$$

$$\rightarrow d\mathcal{E}(M) = 2I_{\sigma_0}(1 + \cos(2\pi\sigma\delta_M))d\sigma$$

L'additivité des éclairagements dus aux différentes raies de fréquences différentes, donc incohérentes entre elles, s'écrit :

$$\mathcal{E}(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\mathcal{E}(M) = 2I_{\sigma_0} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (1 + \cos(2\pi\sigma\delta_M))d\sigma$$

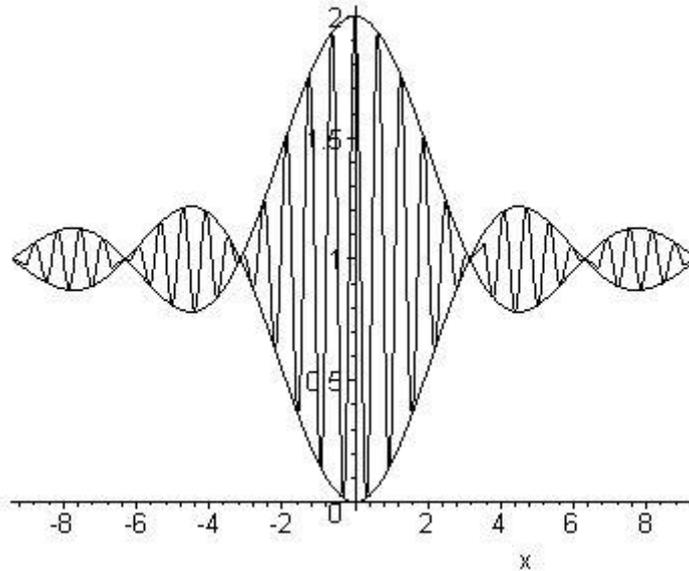
$$\rightarrow \mathcal{E}(M) = 2I_{\sigma_0} \left[(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2\pi\delta_M} (\sin(2\pi\sigma_2\delta_M) - \sin(2\pi\sigma_1\delta_M)) \right]$$

$$\rightarrow \mathcal{E}(M) = 2I_{\sigma_0}\Delta\sigma \left(1 + \frac{1}{\pi\Delta\sigma\delta_M} (\sin(\pi\Delta\sigma\delta_M) \cos(2\pi\sigma_0\delta_M)) \right)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 & \text{largeur spectrale} \\ \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \text{valeur centrale} \end{cases} \quad \text{car} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$\rightarrow \mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta_M) \cos(2\pi\sigma_0\delta_M))$ avec $\mathcal{E}_0 = I_{\sigma_0}\Delta\sigma$ l'éclairement total de la source

Dans le produit $\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta_M) \cos(2\pi\sigma_0\delta_M)$, la fonction $V = |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta_M)|$, de « pseudo période » $\frac{1}{\Delta\sigma}$, apparaît comme l'amplitude lentement variable de la fonction $\cos(2\pi\sigma_0\delta_M)$, de période $\sigma_0 \gg \Delta\sigma$.



b. Contraste et longueur de cohérence

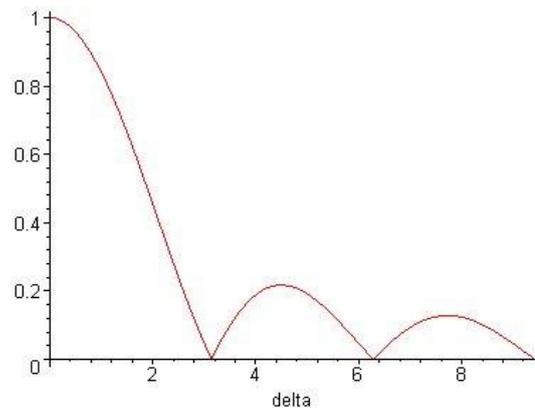
Le contraste des franges est donné par :

$$C = V = |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta_M)|$$

représenté par la fonction ci contre.

Il est maximal pour $\delta_M = 0$.

Il décroît dès que $|\delta_M|$ augmente pour s'annuler lorsque $|\delta_M| = \frac{1}{\Delta\sigma}$.



Ensuite, une augmentation de $|\delta_M|$ produit certes une nouvelle augmentation du contraste, mais celui-ci atteint une valeur maximale de 20%, de sorte que l'on peut considérer que les franges demeurent brouillées pour $|\delta_M| \geq \frac{1}{\Delta\sigma}$.

La valeur maximale de la différence de marche pour laquelle les interférences ne sont pas brouillées est, par définition, la longueur de cohérence de la source :

$$L_c = |\delta_M|_{max} = \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

La durée moyenne τ des trains d'onde émis par la source de largeur spectrale $\Delta\nu$ est donc :

$$\tau = \frac{L_c}{c} = \frac{|\delta_M|_{max}}{c} = \frac{1}{c\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\nu} \rightarrow \tau\Delta\nu = 1$$

Ce résultat est général :

Le produit de la durée moyenne des trains d'onde par largeur spectrale est de l'ordre de l'unité.

En effet la visibilité est proportionnelle à la transformée de Fourier du profil spectral de la source.

3. Cas de la lumière blanche

La lumière blanche correspond à un spectre continu dont les fréquences couvrent au moins tout le domaine du visible ; le soleil, une lampe à incandescence sont des sources de lumière blanche.

La largeur spectrale étant très importante, la longueur de cohérence d'une telle source est très faible. Nous pouvons évaluer son ordre de grandeur à partir du modèle du profil spectral rectangulaire du paragraphe précédent :

$$\lambda \in [0,4 \mu\text{m}; 0,8 \mu\text{m}] \quad \rightarrow \quad \nu \in [3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hz}; 7,50 \cdot 10^{14} \text{ Hz}]$$
$$\rightarrow \quad \Delta\nu = 3,75 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{et} \quad L = |\delta_M|_{\text{max}} = \frac{c}{\Delta\nu} = 0,8 \mu\text{m}.$$

Lorsque l'interféromètre de Michelson, éclairé en lumière blanche, est réglé en lame d'air (anneaux d'égale inclinaison) on n'observe le phénomène d'interférence qu'au voisinage immédiat du contact optique : on observe une teinte quasi uniforme (teinte de Newton).

Lors de la translation du miroir M_1 au voisinage immédiat du contact optique, on voit défiler les teintes de Newton puis apparaît un éclaircissement uniforme blanc, appelé **blanc d'ordre supérieur**.

Prenons l'exemple de la couleur jaune orange ($\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$), $p_{\text{max}} = \frac{\delta_{\text{max}}}{\lambda_0} = 1,33$. Si le centre de la figure est jaune, il s'agit nécessairement de la valeur $p = 1$ (cf. IV.3.b.) donc l'épaisseur de la lame d'air est $e = \frac{\delta}{2} = \frac{p\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} = 0,3 \mu\text{m}$! Le premier anneau noir correspondrait à l'ordre demi entier impair immédiatement inférieur soit $p = \frac{1}{2}$, ce qui correspondrait à une inclinaison de 60° puisque $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e \cos i}{\lambda_0}$.

Lorsque l'interféromètre de Michelson, éclairé en lumière blanche, est réglé en coin d'air (franges d'égale épaisseur) l'ordre est nul au centre ($\delta = 2e = 0$) pour toutes les longueurs d'onde. On observe donc une frange brillante blanche. Celle-ci est entourée de franges irisées. Au delà on peut observer le blanc d'ordre supérieur.

4. Spectre cannelé

L'analyse d'un blanc d'ordre supérieur par un spectroscopie (par exemple un prisme) fait apparaître un spectre continu dans lequel des longueurs d'ondes absentes donnent des raies noires appelées cannelures.