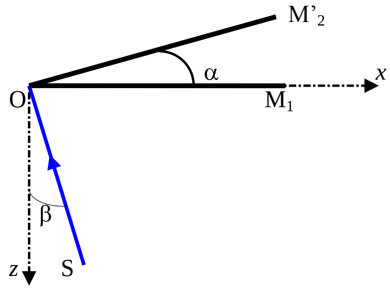
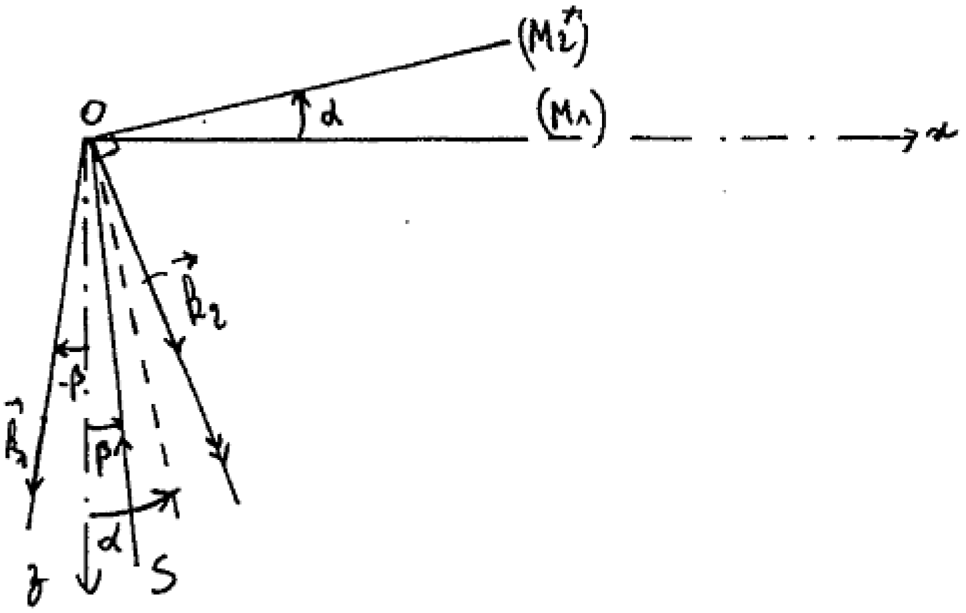
Physique TD 9. INTERFEROMETRE DE MICHELSON

1. Localisation des franges d'égale épaisseur

Un interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air d'angle $\alpha = 3.10^{-3}$ rad. Il est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 683$ nm, placée à l'infini.



a. La source est ponctuelle à l'infini et l'onde plane incidente arrive sous un angle β sur le miroir M_1. Déterminer les directions des ondes réfléchies par les miroirs M_1 et M'_2 et en déduire leurs vecteurs d'onde respectifs $\overrightarrow{k_1}$et $\overrightarrow{k_2}$. L'origine des phases et de l'espace étant prise au point O de l'arête du coin d'air, exprimer l'ordre d'interférences p en un point M en fonction de λ_0, x, y, α et β.



$\overrightarrow{k_1}$ fait l'angle $-\beta$ avec Oz : $\overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\cos\beta\,\vec{e}_z - \sin\beta\,\vec{e}_x)$

$\overrightarrow{k_2}$ fait l'angle $\alpha - \beta$ avec la normale à M'_2 donc $2\alpha - \beta$ avec Oz :

$$\overrightarrow{k_2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\cos(2\alpha-\beta)\,\vec{e}_z + \sin(2\alpha-\beta)\,\vec{e}_x)$$

Onde plane :

$$\begin{cases} a_1(M) = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \overrightarrow{k_1}.\vec{r}\right) \\ a_2(M) = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \overrightarrow{k_2}.\vec{r}\right) \end{cases} \quad avec \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

$$\varphi_M = \varphi_{2M} - \varphi_{1M} = \left(\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1}\right).\vec{r} = \frac{2\pi\delta_M}{\lambda_0} = 2\pi p \quad avec \quad \delta_M = (SM)_1 - (SM)_2$$

$$\rightarrow \quad p = \frac{\left(\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1}\right).\vec{r}}{2\pi} = \frac{1}{\lambda_0}[(\cos(2\alpha-\beta) - \cos\beta)z + (\sin(2\alpha-\beta) + \sin\beta)x]$$

b. La source est étendue, c'est à dire que β varie entre $-\beta_M$ et $+\beta_M$. Évaluer la variation de l'ordre d'interférences en fonction de β_M en un point M du miroir M_1 à $d = 1\,cm$ de O, pour $\beta_M = 10^{-2}\,rad$, puis pour $\beta_M = 1\,rad$. Commenter.

$$x = d \quad et \quad z = 0 \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{\lambda_0}[(\sin(2\alpha-\beta) + \sin\beta)d] = \frac{d}{\lambda_0}(\sin 2\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos 2\alpha + \sin\beta)$$

Comme $\alpha \ll 1$: $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ et $\cos 2\alpha \approx 1$

$$\rightarrow \quad p = \frac{d2\alpha \cos\beta}{\lambda_0}$$

$$p(\beta = 0) = 2\alpha \frac{d}{\lambda_0}$$

$$p(\beta_M) = p(-\beta_M) = \frac{2\alpha d}{\lambda_0} \cos\beta_M$$

$$|\Delta p| = |p(0) - p(\pm\beta_M)| = \frac{2\alpha d}{\lambda_0}(1 - \cos\beta_M)$$

$$\begin{cases} |\Delta p| = 4.10^{-3} \ll 1 \quad pour \quad \beta_M = 10^{-2}\, rad \\ |\Delta p| = 40 \quad pour \quad \beta_M = 1\, rad \end{cases}$$

Dans le premier cas, il n'y a pas brouillage, dans le second, il y a brouillage.

c. Déterminer le lieu des points $M(x, z)$ où $\frac{dp}{d\beta}$ est nul pour $\beta = 0$ et commenter.

$$\frac{dp}{d\beta} = \frac{1}{\lambda_0}[(\sin\beta + \sin(2\alpha - \beta))z + (\cos\beta - \cos(2\alpha - \beta))x]$$

$$Pour\ \beta = 0 \quad : \quad \frac{dp}{d\beta} = \frac{1}{\lambda_0}[\sin(2\alpha)\, z + (1 - \cos(2\alpha))x]$$

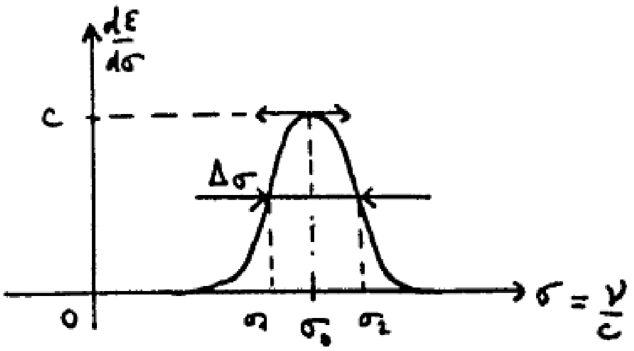
$$\frac{dp}{d\beta} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sin(2\alpha)\, z = (-1 + \cos(2\alpha))x \quad \rightarrow \quad z = \frac{-1 + \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} x = \frac{-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} x$$

$$z = -\tan\alpha \quad \rightarrow \quad Les\ franges\ sont\ localisées\ sur\ M_2'$$

2. Mesure de la largeur d'une raie spectrale, cohérence temporelle

Un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur e est éclairé par une radiation dont le profil spectral est : $\frac{d\mathcal{E}}{d\sigma} = f(\sigma) = C\exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}\right]$ où σ_0, C et a sont des constantes positives ($a \ll \sigma_0$ et $\sigma = \frac{1}{\lambda}$). Pour simplifier, on étendra la fonction f aux valeurs négatives de σ, domaine où elle prend des valeurs négligeables.

a. Quelle est la signification de σ_0? Calculer la largeur $\Delta\sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a.



$$\frac{d\mathcal{E}}{d\sigma} = f(\sigma) = C\exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}\right] \quad : \quad profil\ Gaussien$$

σ_0 est le nombre d'onde « central » , $\lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0}$ est la longueur d'onde de la raie (quasi monochromatique).

Largeur à mi-hauteur :

$$\exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}\right] = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2} = \ln 2 \quad \leftrightarrow \quad \sigma - \sigma_0 = \pm a\sqrt{\ln 2} \quad \leftrightarrow \quad \sigma = \sigma_0 \pm a\sqrt{\ln 2}$$

$$\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{\Delta\sigma}{2\sqrt{\ln 2}} = 0{,}6\,\Delta\sigma$$

a caractérise la largeur de la raie.

b. On fait varier l'épaisseur e en translatant l'un des miroirs avec un moteur. Établir l'expression de l'éclairement $\mathcal{E}(e)$ en fonction des constantes et de la fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)e^{2j\pi x}d\sigma$, transformée de Fourier de $f(\sigma)$.

Une bande de largeur $d\sigma$ (comprise entre σ et $\sigma + d\sigma$) est une source élémentaire monochromatique d'éclairement $d\varepsilon_0 = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}d\sigma = f(\sigma)d\sigma$.

En M, l'onde produit l'éclairement $d\varepsilon(M) = 2d\varepsilon_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = 2d\varepsilon_0(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)$

Pour toute la raie $\varepsilon(M) = \int d\varepsilon(M)$ (additivité des éclairements car les ondes de fréquences différentes sont distinctes).

$$\varepsilon(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2f(\sigma)d\sigma(1 + \cos 2\pi\delta\sigma) \quad avec \quad \delta = 2e$$

$$\varepsilon(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2f(\sigma)d\sigma(1 + \cos 4\pi\sigma e) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2f(\sigma)d\sigma\left(1 + \frac{e^{j4\pi\sigma e} + e^{-j4\pi\sigma e}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2f(\sigma)d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j4\pi\sigma e}f(\sigma)d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j4\pi\sigma e}f(\sigma)d\sigma$$

$$On\ pose \quad : \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)d\sigma = \varepsilon_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon(e) = 2\varepsilon_0 + F(2e) + F(-2e)$$

c. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{a^2}\right)\exp(2j\pi ux)\,du = a\sqrt{\pi}\exp(-\pi^2a^2x^2)$, établir l'expression de $\mathcal{E}(e)$ et tracer l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$? Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre ? Retrouver l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de la source en fonction de $\Delta\sigma$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j4\pi\sigma e} f(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j4\pi\sigma e} C \exp\left[-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{a^2}\right] d\sigma = Cte \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{a^2}\right) \exp(2j\pi ux)\, du$$

$$avec \quad u = \sigma - \sigma_0 \quad et \quad x = 2e \quad \rightarrow \quad \exp(2j\pi ux) = \exp(2j\pi(\sigma-\sigma_0)2e)$$

$$\rightarrow \quad Cte = C\, e^{4ej\pi\sigma_0}$$

$$\rightarrow \quad F(2e) = C\, e^{4ej\pi\sigma_0}\, a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 4e^2)$$

$$De\ même, \quad F(-2e) = C\, e^{-4ej\pi\sigma_0}\, a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 4e^2) \quad et \quad F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)d\sigma = Ca\sqrt{\pi} = \varepsilon_0$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon(e) = 2\, Ca\sqrt{\pi} + C\, e^{4ej\pi\sigma_0}\, a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 4e^2) + C\, e^{-4ej\pi\sigma_0}\, a\sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 a^2 4e^2)$$

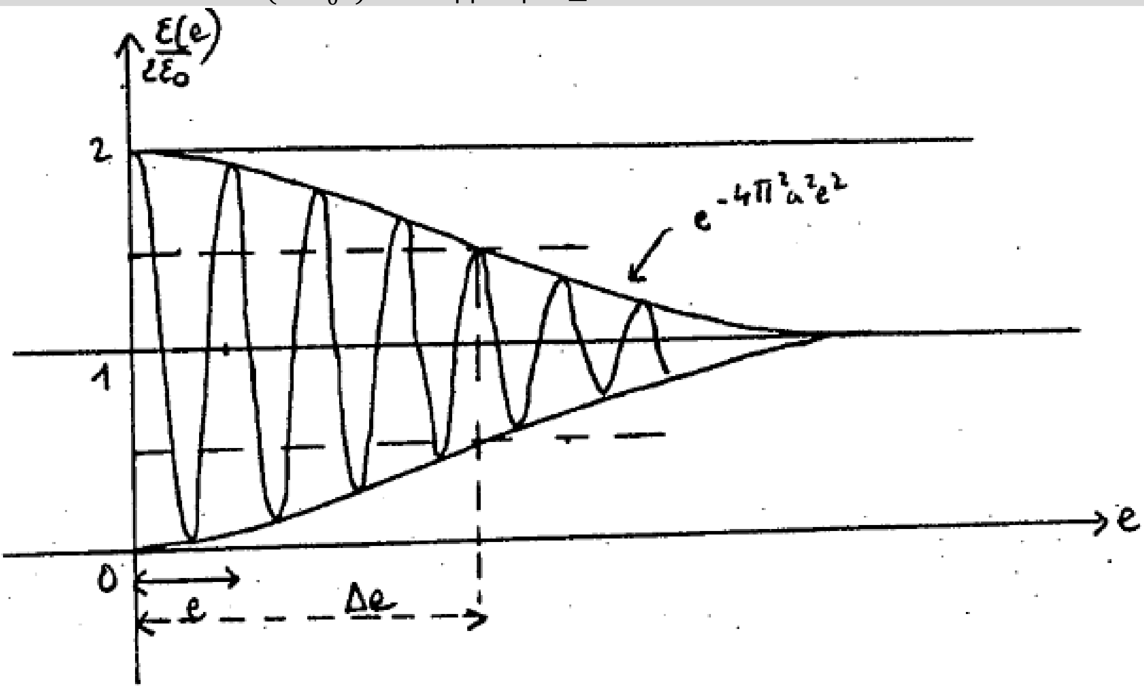
$$\rightarrow \quad \varepsilon(e) = 2\, Ca\sqrt{\pi} \left(1 + \frac{e^{4ej\pi\sigma_0} + e^{-4ej\pi\sigma_0}}{2} \exp(-\pi^2 a^2 4e^2)\right)$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon(e) = 2\, Ca\sqrt{\pi}(1 + \cos(4e\pi\sigma_0)\exp(-\pi^2 a^2 4e^2)) = 2\varepsilon_0(1 + \cos(4e\pi\sigma_0)\exp(-\pi^2 a^2 4e^2))$$

La fonction $\cos(4e\pi\sigma_0)$ a une période de $\frac{1}{2\sigma_0} = \frac{\lambda_0}{2}$. (Fonction habituelle : $\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$)

Sur une distance $e = \frac{1}{2\sigma_0}$, $\quad e^{-4\pi^2 a^2 e^2}$ décroît très peu puisque $a \ll \sigma_0$ par hypothèse.

On a donc une fonction $\cos(4\pi\sigma_0 e)$ enveloppée par $\pm e^{-4\pi^2 a^2 e^2}$



La visibilité des franges $V = e^{-4\pi^2 a^2 e^2} = \frac{\varepsilon_{Max} - \varepsilon_{Min}}{\varepsilon_{Max} + \varepsilon_{Min}}$ décroît exponentiellement avec e.

On peut accéder à la valeur de a en mesurant par exemple, la valeur de e pour laquelle $e^{-4\pi^2 a^2 e^2} = \frac{1}{2}$ (largeur à mi-hauteur)

$$e^{-4\pi^2 a^2 (\Delta e)^2} = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad 4\pi^2 a^2 (\Delta e)^2 = \ln 2 \quad \leftrightarrow \quad \Delta e = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi a} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi} \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\sigma} \quad d'après\ 1.$$

La mesure de Δe donne : $\Delta\sigma = \frac{\ln 2}{\pi \Delta e}$

Partant de $e = 0$, il faut pouvoir atteindre $e = \frac{\ln 2}{\pi\Delta\sigma}$: on peut être limité par des contraintes mécaniques (translation limitées à quelques cm pour un appareil usuel)

Longueur de cohérence : $e^* = \delta_{max} = 2e_{max} \approx 2\Delta e$

Remarque :

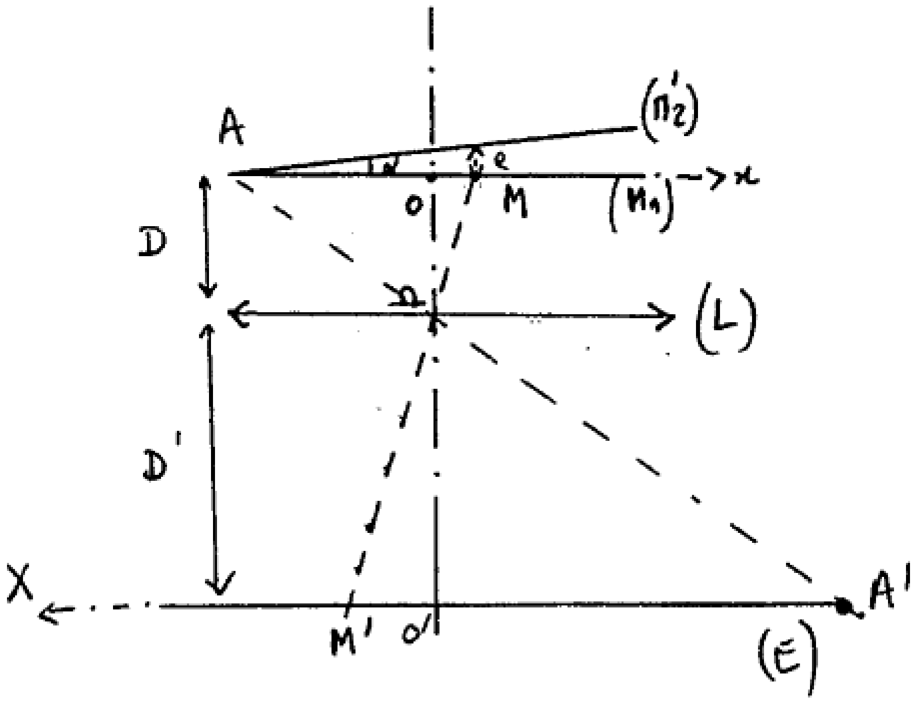
$$e^* = 2\Delta e = 2\frac{\ln 2}{\pi\Delta\sigma} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^* = c\tau \\ \Delta\sigma = \dfrac{\Delta\nu}{c} \end{cases} \quad \rightarrow \quad c\tau = 2\frac{\ln 2}{\pi\Delta\nu} c$$

On retrouve le résultat classique :

$$\tau\Delta\nu = 2\frac{\ln 2}{\pi} = 0{,}44 \quad \rightarrow \quad \tau\Delta\nu \approx 1$$

3. Spectre cannelé

Un interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air. Il est éclairé en lumière parallèle grâce à une source S placée au foyer d'une lentille convergente. Les franges sont observées sur un écran plan (E) grâce à un lentille (L) de distance focale $f' = 12{,}5\ cm$, placée à $D = 15\ cm$ de M_2.



a. La source étant monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6943\ \mu m$, on mesure sur l'écran une interfrange $i = 4{,}63\ mm$. Calculer l'angle α du dièdre formé par les deux miroirs.

On sait que $\delta_M = 2e$, d'où l'interfrange sur le plan (M_1) :

$$e = \alpha x \quad \rightarrow \quad \delta_M = 2\alpha x = p\lambda$$

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{p\lambda}{2\alpha} & frange\ brillante\ dordre\ p\ si\ p \in \mathbb{Z} \\ x_{p+1} = \dfrac{(p+1)\lambda}{2\alpha} & frange\ brillante\ d'ordre p+1\ si\ p \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \quad x_{p+1} - x_p = i_0 = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

$$Projection: \quad \underline{X} = |\gamma| = \frac{D'}{D} \quad avec \quad \frac{1}{D'} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f}$$

$$\rightarrow \quad D' = \frac{Df}{D-f} \quad et \quad X' = |\gamma|X = \frac{f}{D-f} \quad (D' = 75\ cm\ ;\ \gamma = -5)$$

$$\rightarrow \quad i = |\gamma| i_0 \quad donc \quad i = \frac{\lambda f}{2\alpha(D-f)} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\lambda f}{2i(D-f)} = 3{,}75.10^{-4}\ rad \quad (\alpha = 1{,}3')$$

b. Établir, en fonction de α, D, f' et λ l'expression de l'éclairement sur l'écran en un point M' repéré par $X = A'M'$ dans le plan de section principale (A' est le conjugué de l'arête A à travers (L)).

Eclairement :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_M}{\lambda}\right)\right) \quad avec \quad \delta_M = 2\alpha x = \frac{2\alpha X}{|\gamma|} = \frac{2\alpha(D-f)X}{f}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{E}(X) = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2\alpha(D-f)X}{\lambda f}\right)\right) = \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{X}{i}\right)\right)$$

c. La source S émet une lumière blanche: $\lambda \in [0{,}4\ \mu m\ ; 0{,}75\ \mu m]$. Déterminer le nombre de cannelures noires observées au spectroscope dont la fente est disposée à la place de l'écran (E), à la distance $X = 50\ mm$ de A'. Calculer les longueurs d'onde des radiations éteintes.

$$\mathcal{E}(X) = 0 \quad pour \quad \cos\left(2\pi\frac{X}{i}\right) = -1 \quad \rightarrow \quad 2\pi\frac{X}{i} = (2q+1)\pi \quad avec \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \quad 4\pi\alpha\frac{(D-f)X}{\lambda f} = (2q+1)\pi \quad \rightarrow \quad \lambda_q = \frac{4\alpha X}{2q+1}\frac{D-f}{f} = \frac{15}{2q+1} \quad avec \quad \lambda\ en\ \mu m \in [0{,}4; 0{,}75]$$

$$\rightarrow \quad 0{,}8q \leq 14{,}6 \leq 1{,}5q \quad d'où \quad \begin{cases} q \leq 18{,}25 \\ q \geq 9{,}73 \end{cases} \quad \rightarrow \quad q = \{10, 11, \dots, 18\} \quad \rightarrow \quad 9\ cannelures$$

Les longueurs de radiations absentes sont (en μm)

$$\lambda_{10} = 0{,}7143$$
$$\lambda_{11} = 0{,}6522$$
$$\lambda_{12} = 0{,}6000$$
$$\lambda_{13} = 0{,}5556$$
$$\lambda_{14} = 0{,}5172$$
$$\lambda_{15} = 0{,}4839$$
$$\lambda_{16} = 0{,}4545$$
$$\lambda_{17} = 0{,}4286$$
$$\lambda_{18} = 0{,}4054$$