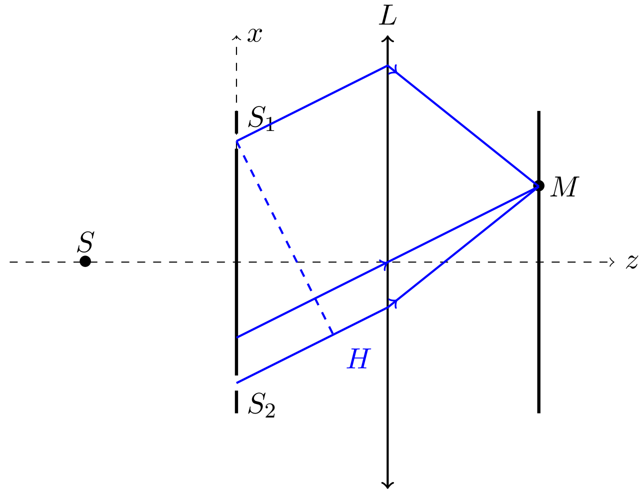
I Fentes d'Young dans le plan focal d'une lentille



1. Comme S est sur la médiatrice de S_1S_2, les sources secondaires sont en phases, et la différence de marche se résume à calculer

$$\delta = S_2M - S_1M$$

D'après le théorème de Malus, les points S_1 et H sont en phase, donc $\delta = S_2H$ que l'on calcule dans le triangle rectangle S_1S_2H. L'angle en S_1 vaut α et

$$S_2H = a\sin\alpha \simeq a\alpha$$

Par ailleurs, l'angle α est aussi celui que fait le faisceau parallèle avec l'horizontale, donc

$$\tan\alpha = \frac{x}{f'} \simeq \alpha$$

On trouve donc finalement

$$\delta = \frac{ax}{f'}$$

2. Les franges brillantes sont telles que

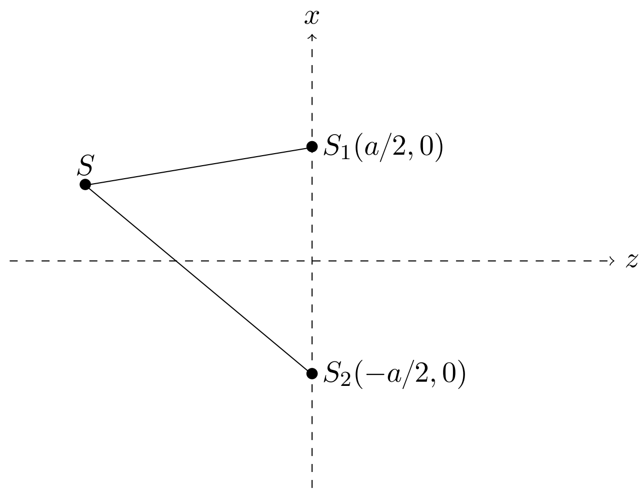
$$\Delta\varphi = 2n\pi \;\Rightarrow\; \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} = 2n\pi \;\Rightarrow\; x_n = \frac{n\lambda_0 f'}{a}$$

ce qui donne une interfrange

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

3. Qualitativement, le déplacement va produire un système de franges qui se déplace, en raison de la différence de marche supplémentaire δ' entre les trajets SS_1 et SS_2. Par contre, l'interfrange ne va pas changer puisqu'elle ne dépend a priori que de la distance entre les fentes.

De manière quantitative, si on déplace la source S sur l'axe x d'une distance d, la situation est la suivante



En posant $S(x_0, z_0)$, $S_1(a/2, 0)$ et $S_2(-a/2, 0)$ on peut calculer

$$SS_1 = ||\overrightarrow{SS_1}|| = \sqrt{\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{a^2}{4} - ax_0 + z_0^2}$$

de même

$$SS_2 = ||\overrightarrow{SS_2}|| = \sqrt{\left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 + z_0^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{a^2}{4} + ax_0 + z_0^2}$$

calcul bien connu ! En effectuant les développements limités, la différence de marche supplémentaire devient [1]

$$\delta' = SS_2 - SS_1 = \frac{ax_0}{z_0}$$

Le déphasage total vaut alors

$$\Delta\varphi_t = \Delta\varphi + \Delta\varphi' = \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} + \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax_0}{z_0}$$

Les franges brillantes sont telles que (voir question précédente)

$$\Delta\varphi = 2n\pi \;\Rightarrow\; \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} + \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax_0}{z_0} = 2n\pi \;\Rightarrow\; x_n = \frac{n\lambda_0 f'}{a} - \frac{ax_0}{2z_0\theta}$$

On observe donc un système de franges décalées vers le haut ($z_0 < 0$). L'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

est inchangé.

4. Si la source est une source étendue, les sources ponctuelles élémentaires la constituant vont donner des systèmes de franges d'interférences décalées, et donc un brouillage. On met en évidence la cohérence spatiale de la source avec cette expérience.

Quantitativement, lorsque le maximum d'interférence central avec la source placée au centre est superposé pour la première à un minimum d'interférence pour une source décalée d'une longueur $l_c/2$, le

1. attention à calculer la différence de marche dans le même sens que dans la question précédente !

contraste de la figure d'interférence devient minimal. On trouve le premier minimum dans la seconde figure d'interférence pour

$$\Delta\varphi_t = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi a x}{\lambda_0 f'} + \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a x_0}{z_0} = \pi$$

donc pour

$$x'_{min} = \frac{\lambda_0 f'}{2a} - \frac{f x_0}{z_0}$$

Cette abscisse est égale à 0 pour

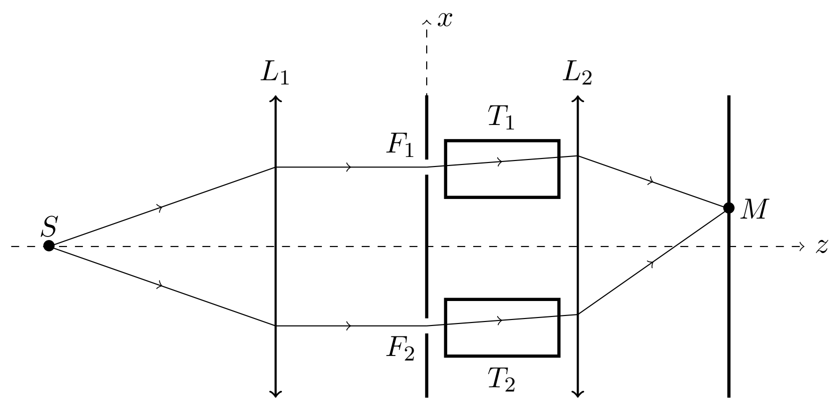
$$\frac{x_0}{z_0} = \frac{\lambda_0}{2a}$$

soit

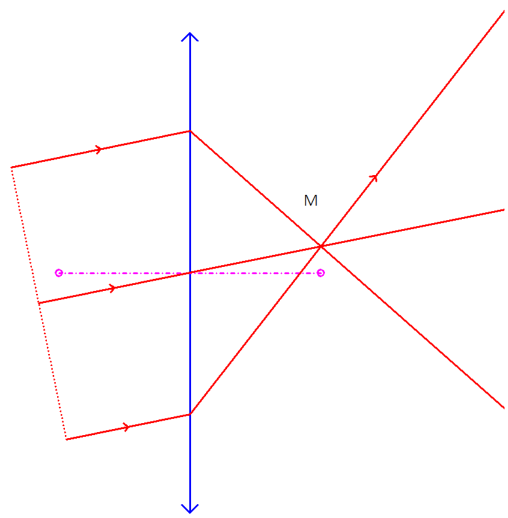
$$l_c = -\frac{\lambda_0}{a} z_0 \quad (z_0 < 0)$$

qui est appelée longueur de cohérence spatiale de la source.

II Mesure de l'indice de l'air



1. L'écran se trouve dans le plan focal image de la lentille. Le point M est donc l'image d'une onde plane ayant pour inclinaison θ par rapport à l'axe optique

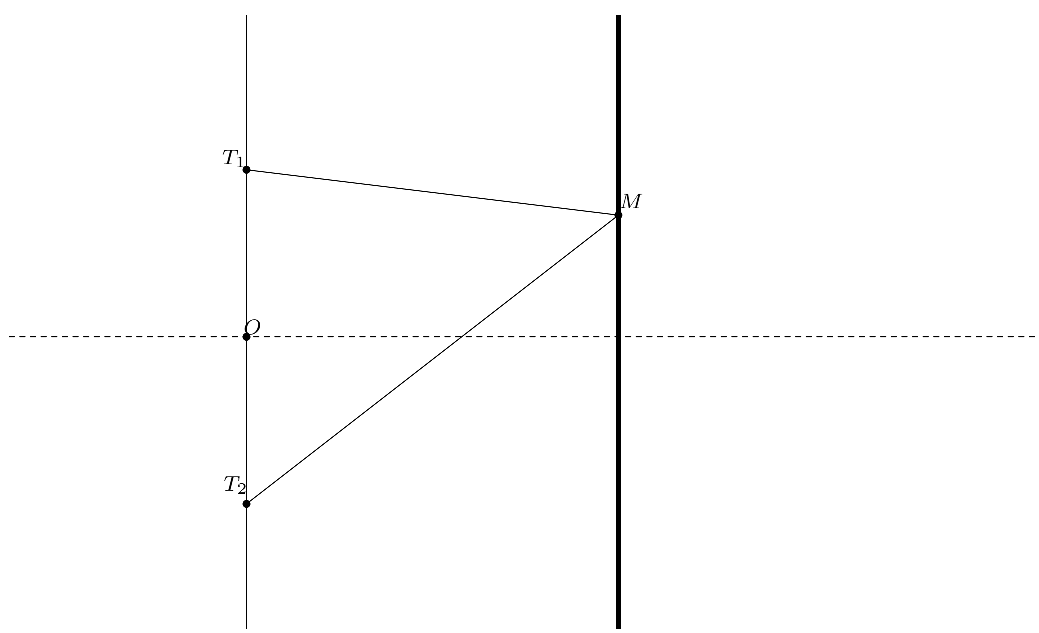


Compte tenu de la géométrie

$$\tan\theta \simeq \theta = \frac{x}{f}$$

où x est l'abscisse de M et f la distance focale de la lentille L_2. L'angle θ étant petit (conditions de Gauss), on peut considérer au premier ordre que le trajet dans chaque tube a pour longueur l.

Lorsque les deux tubes sont remplis d'air, la différence de marche au point $M(x, f)$ vient de la géométrie suivante



où $T_1(a/2, 0)$ et $T_2(-a/2, 0)$ sont les points où l'onde plane arrive sur la lentille L_2. On peut alors exprimer

$$T_1M = ||\overrightarrow{T_1M}|| = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + f^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4} - ax + f^2}$$

et

$$T_2M = ||\overrightarrow{T_2M}|| = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + f^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4} + ax + f^2}$$

calcul bien connu ! En effectuant les développements limités, la différence de marche supplémentaire devient

$$\delta = n(T_2M - T_1M) = n\left(\frac{ax}{f}\right)$$

où n est l'indice de l'air dans les tubes et dans le reste du montage. La frange centrale, d'ordre 0 et située en $x = 0$, est brillante.

Si on vide le tube T_2 et que l'indice y devient n', alors une différence de marche supplémentaire apparait [2]

$$\delta' = (F_2T_2) - (F_1T_1) = n'l - nl$$

et la différence de marche totale est donc

$$\delta_t = n\left(\frac{ax}{f}\right) + l(n' - n)$$

La frange précédemment en $x = 0$, correspondant à $\delta = 0$ est désormais telle que

$$n\left(\frac{ax}{f}\right) + l(n' - n) = 0 \Rightarrow x = \frac{lf}{na}(n - n')$$

$(n - n')$ étant positif, la frange se retrouve décalée vers le haut.

2. Pour passer d'une frange brillante à la suivante en O, il faut un déphasage qui change de 2π, donc une différence de marche qui change de λ et un ordre d'interférence p qui change de 1. Pour passer d'une frange brillante à la frange sombre immédiatement voisine, il faut un déphasage de π, une différence de marche qui change de $\lambda/2$ et un ordre d'interférence p qui change de 1/2. On a donc une différence de marche en $x = 0$

$$\delta_t = -101.5\lambda = l(n' - n)$$

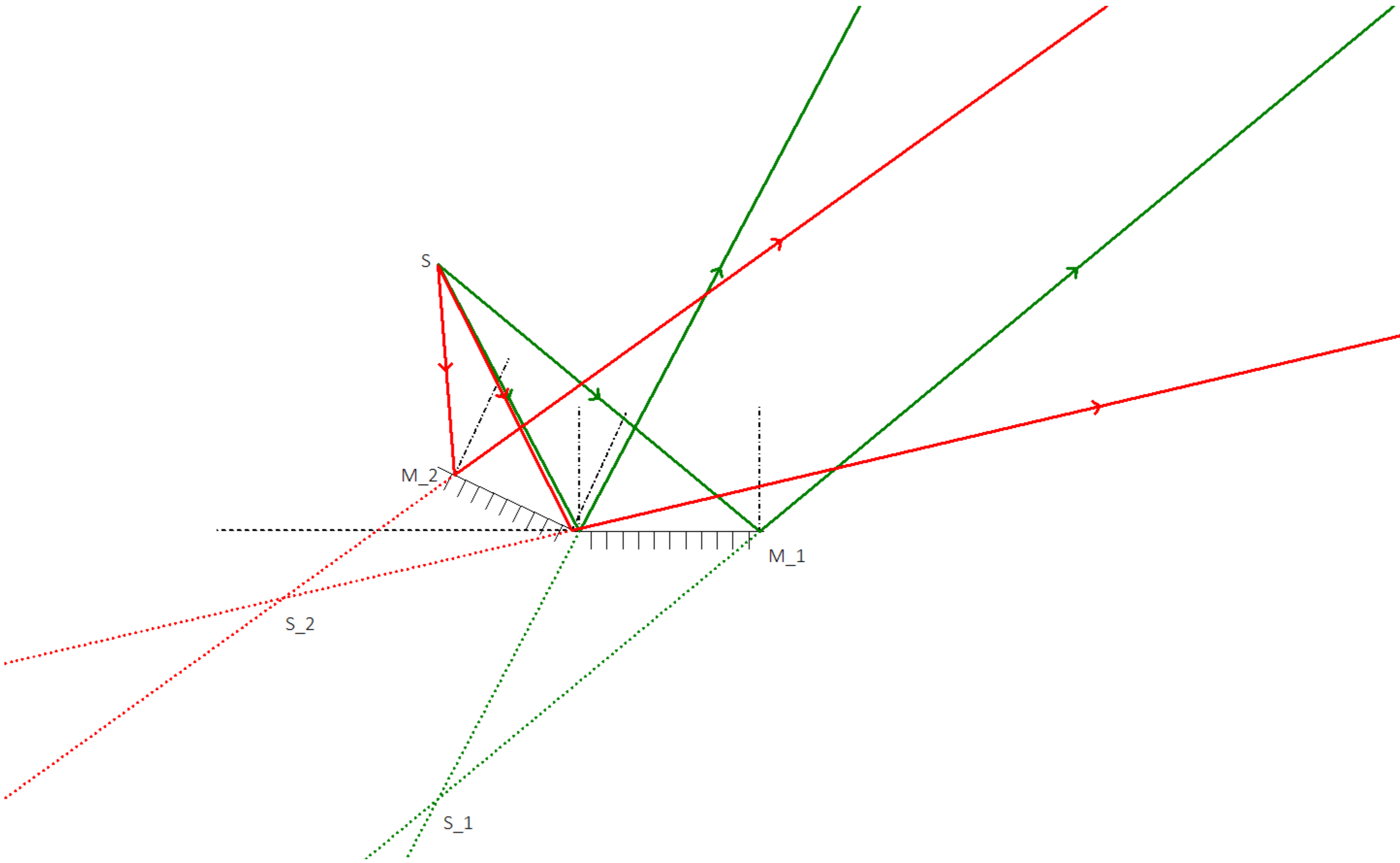
qui est négative puisque la frange d'ordre 0 ou de différence de marche nulle s'est déplacée vers le haut. On a donc numériquement $n' = 1$ et

$$n = 1 + \frac{101.5\lambda}{l} = 1 + \frac{101.5 \cdot 0.577 \cdot 10^{-6}}{0.2} = 1.000293$$

III Miroirs de Fresnel

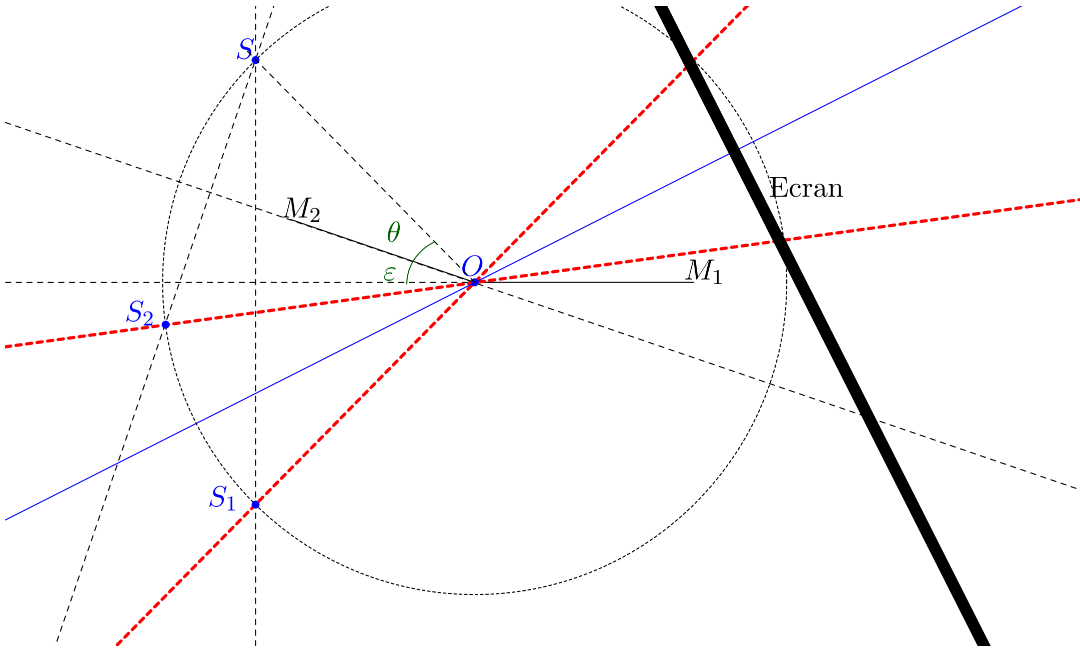
1.

2. attention à calculer la différence de marche dans le même sens que dans la question précédente !



Le champ d'interférence est compris entre les deux faisceaux réfléchis par les miroirs.

2. Les rayons semblent provenir des points S_1 et S_2. Le point S_1 est le point conjugué de S par le miroir M_1, le point S_2 est le point conjugué de S par le miroir M_2. On observe les interférences dans un plan perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{S_1OS_2}$



3. On note θ l'angle entre SO et le miroir M_2. On a alors $\widehat{SOS_2} = 2\theta$ et $\widehat{SOS_1} = 2(\theta + \varepsilon)$. L'angle entre les deux sources secondaires est alors $\widehat{S_1OS_2} = 2\varepsilon$. On peut alors faire une analogie avec la géométrie du problème des fentes d'Young :

- la distance entre les sources $a = S_1S_2$ vaut, pour des ε petits

$$a = 2L\sin\varepsilon \simeq 2L\varepsilon$$

  où L est la distance entre la source S et le point O,
- la distance entre le plan des sources secondaires et l'écran vaut

$$D = L\cos\varepsilon + d \simeq L + d$$

  où d est la distance entre O et l'écran.

4. Dans ces conditions, la différence de marche $\delta(x)$ en un point M repéré par une abscisse x sur l'écran est donnée par

$$\delta = \frac{ax}{D} = \frac{2L\varepsilon x}{L+d}$$

L'éclairement est donné par

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)\right] = 2\varepsilon_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{L\varepsilon x}{L+d}\right)\right]$$

L'interfrange est donné par l'écart sur l'écran entre deux franges de même nature. Pour une frange brillante

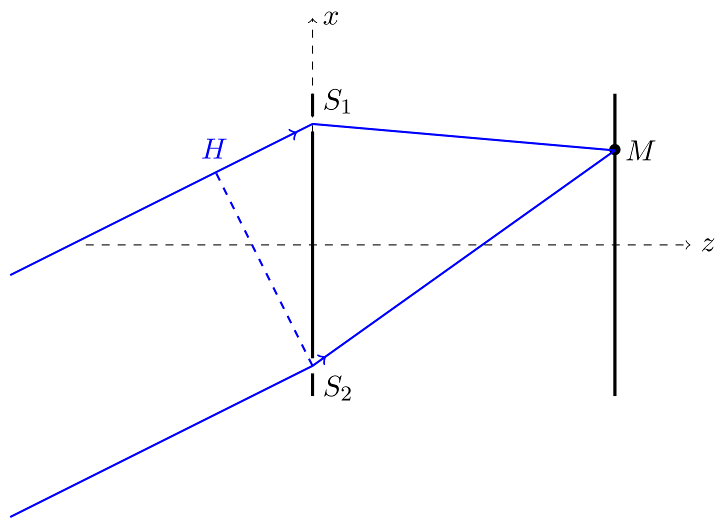
$$\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{L\varepsilon x}{L+d} = 2k\pi \;\Rightarrow\; x_k = k\frac{\lambda_0(L+d)}{2L\varepsilon}$$

et donc l'interfrange

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0(L+d)}{2L\varepsilon}$$

IV Observation de deux étoiles proches : interféromètre stellaire

1.



Il faut calculer la différence de marche

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = SS_2 + S_2M - (SH + HS_1 + S_1M) = SS_2 - (SH + HS_1) + S_2M - S_1M$$

$S_2M - S_1M = \delta = ax/D$ a été calculée en cours. D'après le théorème de Malus, les points S_2 et H sont en phase, donc $\delta' = SS_2 - (SH + HS_1) = -S_1H$ que l'on calcule dans le triangle rectangle S_1S_2H. L'angle en S_2 vaut α et

$$S_1H = a\sin\alpha \simeq a\alpha$$

On trouve donc finalement

$$\delta_b = \frac{ax}{D} - a\alpha$$

et l'ordre d'interférence

$$p = \frac{\delta_b}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 D} - \frac{a\alpha}{\lambda_0}$$

L'éclairement vaut alors

$$\varepsilon_b = 2\varepsilon_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} - a\alpha\right)\right)\right)$$

qui est maximum pour $p = k$, k entier

$$\frac{ax_k}{\lambda_0 D} - \frac{a\alpha}{\lambda_0} = k \quad\Rightarrow\quad x_k = k\frac{\lambda_0 D}{a} + \alpha D$$

On a donc

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

La position de la frange d'ordre $p = 0$ est alors

$$x_0 = \alpha D$$

2. Les sources sont incohérentes, on va donc sommer les éclairements et il va en résulter un brouillage des franges d'interférences. Le brouillage est total si $\Delta p = k + 1/2$. Or $p_a = \frac{ax}{\lambda_0 D}$ donc

$$\Delta p = p_a - p_b = \frac{a\alpha}{\lambda_0}$$

Le brouillage se produit donc pour

$$a_k = \frac{\lambda_0}{\alpha}(k + 1/2)$$

où k est un entier positif ou nul.

3. On calcule l'éclairement total

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 2\varepsilon_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} - a\alpha\right)\right)\right]$$

et en utilisant la formule $\cos p + \cos q = 2\cos(p+q)/2\cos(p-q)/2$, on obtient

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} - \frac{a\alpha}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a\alpha}{2}\right)\right]$$

que l'on peut mettre sous la forme demandée

$$I(M) = I_0(1 + C\cos\Delta\varphi)$$

en posant

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} - \frac{a\alpha}{2}\right)$$

qui est le déphasage des trous d'Young, déphasé d'un facteur $\frac{\pi a\alpha}{\lambda_0}$ du à l'asymétrie du problème, et en posant

$$C = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a\alpha}{2}\right)$$

qui est la fonction qui s'annule pour

$$a_k = \frac{\lambda_0}{\alpha}(k + 1/2)$$

4. On a

$$a \leqslant 34 \cdot 10^{-2}$$

donc pour la première annulation ($k = 0$)

$$\frac{\lambda_0}{2\alpha} \leqslant 34 \cdot 10^{-2}$$

soit

$$\frac{2\alpha}{\lambda_0} \geqslant \frac{1}{34 \cdot 10^{-2}}$$

et donc la valeur minimale de α qui vaut

$$\alpha_{min} = \frac{\lambda_0}{2 \cdot 34 \cdot 10^{-2}} = \frac{680 \cdot 10^{-9}}{68 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}\, rad$$

Cette méthode est donc très précise.